This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910415 0

OHF
Kolik

Lehrbuch der höheren Analysis.

Von

Jakob Philipp Kulik,

Doktor der Philosophie und der freien Künste, öffentl. und ordentl. Professor der höheren Mathematik an der Karl-Ferdinandeischen Universität.

O singularis et eximia Mathesis!
Quae te tam laeta tulerunt
Saecula? qui tanti talem genuere parentes?

Ramus schol. math. lib. I.

Mit 3 Steintafeln.

AUTOR LIBRARY
NEW-YORK

Prag
in Kommission bei Kronberger und Weber
1831.

OHF
Kulik

Lehrbuch der höheren Analysis.

Von

Jakob Philipp Kulik,

Doktor der Philosophie und der freien Künste, öffentl. und ordentl. Professor der höheren Mathematik an der Karl-Ferdinandeischen Universität.

O singularis et eximia Mathesis!
Quae te tam laeta tulerunt
Saecula? qui tanti talem genuere parentes?
Ramus schol. math. lib. I.

Mit 3 Steintafeln.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

Prag
in Kommission bei Kronberger und Weber
1831.

Lehrbuch der höheren Analysis.

Von

Jakob Philipp Kulik,

Doktor der Philosophie und der freien Künste, öffentl. und ordentl. Professor der höheren Mathematik an der Karl-Ferdinandeischen Universität.

O singularis et eximia Mathesis!
Quae te tam laeta tulerunt
Saecula? qui tanti talem genuere parentes?
Ramus schol. math. lib. I.

Mit 3 Steintafeln.

STOR LIBRARY NEW-YORK

Prag
in Kommission bei Kronberger und Weber
1831.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

Gedruckt bei Johann Nep. Geržabek.

Vorwort.

Ich verstehe unter der höheren Analysis, im Gegensatze der, die Algebra, die unbestimmte Analytik und die Euklidische Geometrie, umfassenden niederen Analysis, denjenigen Theil der reinen Mathematik, welcher die veränderlichen Größen, sie mögen nun Zahlen, oder die anschaulichen Formen des Raumes, nämlich: Linien, Flächen und Körper sein, zum Gegenstande hat.

Hiernach zerfällt diese Wissenschaft in zwei Haupttheile:

I. in die höhere Arithmetik, welche die Funktionenlehre, oder die allgemeinen Beziehungen der Funktionen zu den in ihnen vorkommenden veränderlichen Größen, ferner die Differential- und Integralrechnung enthält,

II. in die höhere Geometrie, welche von den Kurven mit einfacher Krümmung sowohl, als auch von Flächen und Kurven mit doppelter Krümmung handelt.

Dieser Eintheilung gemäß habe ich im vorliegenden Werke die einzelnen Lehren, zwar kurz und bündig,

allein, wie ich hoffe, ohne der Deutlichkeit Eintrag zu machen, und mit steter Rücksicht auf ihre Anwendbarkeit für das Leben, vorgetragen: wobei ich, um dem Ganzen nicht eine disharmonische Ausdehnung zu geben, die weitere Ausführung und Anwendung einiger Lehren, sonach auch ihre Literatur, mit Ausnahme einiger weniger Citaten, absichtlich übergangen habe.

Die vorausgeschickte Einleitung enthält Gegenstände, welche in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Algebra entweder gar nicht, oder nur obenhin behandelt werden, und die ihrer Anwendbarkeit halber einem Anfänger manches Vergnügen gewähren dürften.

Die eingestreuten Tafeln, und insbesondere, die der hyperbolischen Sektoren zur leichteren Auflösung der kubischen Gleichungen, und der elliptischen Bogenlängen, sind für jene Leser bestimmt, welche von der Mathematik einen praktischen Gebrauch machen.

Prag, im September 1830.

J. Ph. Kulik.

Druckfehler.

3. u. bedeutet: Zeile von unten.

S. 2. Z. 3 statt 10^{3n} lies 10^{4n}=. S. 12. Z. 8 u. st. $(m-1)(m-2)$ l. $m(m-1)(m-2)$. S. 13. Z. 10 st. $\binom{m}{m-1}$ l. $\binom{m}{n-1}$. S. 14. Z. 5 st. $m-1$ l. $m+1$. S. 23. Z. 3 u. st. $\frac{1}{2}b-2y$ l. $\frac{1}{2}b+2y$. S. 24. Z. 11 u. st. $(x^r \pm a)^r$ l. $(x^r \pm a)^{\frac{1}{r}}$. S. 64. Z. 4 st. $N'<M'$ l. $N'>M'$. S. 75. Z. 5 st. 3. l. 2. Z. 14 st. 24 l. 25. S. 97. Z. 3 st. $c+1$ l. $c-1$. S. 101. Z. 2 u. st. Bp l. Bp^2. S. 109. Z. 7 u. st. $q>1$ l. oder $q<1$. S. 118. Z. 11 statt + ist überall −, und + statt − zu setzen. S. 120. Z. 17 u. st. $cos(\frac{1}{4}\pm\beta)$ l. $cos(\frac{1}{4}\pi\pm\beta)$. S. 126. Z. 5 st. $sinv\,o=1$ l. $sinv\,o=o$. S. 127. Z. 6 im Zähler st. β l. $tg\,\beta$, im Nenner st. $\pm$ l. $\mp$ S. 129. Z. 7 u. im Zähler st. $x+y$ l. $x\pm y$, im Nenner st. $1+xy$ l. $1\mp xy$. S. 131. Z. 16 st. $-a^5:5!$ l. $+a^5:5!$ S. 133. Z. 9 st. 193) l. 195) S. 134. Z. 7 st. $cos\,nz$ l. $2cos\,nz$. S. 135. Z. 15 st. $\pm 2^n$ l. $\pm 2^{n-1}$. S. 147. Z. 1 st. x^{m-r+1} l. x^{m-r+3}. S. 148. Z. 14 st. $-\frac{p}{q}$ l. $-\frac{p}{q}^m$. S. 154. Z. 11. st. 8y l. 80y. S. 160. Z. 7 st. 4+ l. 1+ S. 167. Z. 12 im letzten Gliede st. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})$ l. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-1})$ S. 168. Z. 7 st. tg l. $-tg$ und st. $-cot$ l. cot. S. 169. Z. 3 u. st. $x-w$ l. $y-w$. S. 170. Z. 3 u. st. 157) l. 168). S. 172. Z. 1 u. st. y^3 l. y^2. S. 178. Z. 1 st. δ^n l. $\delta^n a$. S. 180. Z. 14 u. im Zähler st. $n+1$ l. n, im Nenner statt $r!$ l. $(r+1)!$ S. 192. Z. 5. st. $\sqrt[3]{x^3}$ l. $\sqrt[3]{x}$. S. 195. Z. 10 st. $\sqrt{(x^2+y^2)}$ l. x^2+y^2. S. 199. Z. 7 st. $q'k^2+q''k^2$ l. $q'k+q''k^2$.

S. 202. Z. 11 u. statt $y^{\alpha-1}$ l. $y^{\alpha-1}dy$. S. 209. Z. 5 st. $2x^2$ l. $2x^{-2}$. S. 211. Z. 5 st. dx l. dy. S. 214. Z. 2 u. st. $.^{ax}\lambda a$ l. $a^x\lambda a$. S. 221. Z. 12 und Z. 14. st. βT l. βS. S. 222. Z. 8 das Zeichen — vor dem Bruch kommt in den Zähler. S. 225. Z. 4 u. st. ψx l. $\psi\alpha$. S. 231. Z. 13 u. st. $\beta=\alpha$ l. $\beta=a$ Z. 15 u. st. $sin\sqrt{}-1$ l. $sin\varphi\sqrt{}-1$. S. 236. Z. 3 st. um l. und Z. 5 der Bruch unter dem Gleichheitszeichen ist umzukehren. Z. 2 u. im Nenner st. b l. bz. S. 241. Z. 5 u. st. Nenner l. Zähler. S. 250. Z. 6 u. st. $\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{X}}$ l. $\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$. S. 252. Z. 9 st. (bx^{n-r}) l. $(bx^{n-r}+a)$. Z. 4 u. im Koeffizienten st. $q-1$ l. $(2q-1)^r$. S. 254. Z. 4 st. $sin\,3x$ l. $cos\,3x$. Z. 5 st. $cos\,3x$ l. $sin\,3x$. S. 260. Z. 4 st. bdz l. bdx. S. 263. Z. 7 ist der Koeffizient R wegzulassen. Z. 11. st. von l. von y. S. 269. Z. 9 st. $(r-1)\,Sn^{r-1}$ l. $(r-1)\,Sn^{r-2}$ Z. 12 st. Sn^{r+1} l. Sn^{r-1}. S. 271. Z. 12 st. $\frac{1}{4}$ l. $\frac{1}{5}$. S. 274. Z. 3 im letzten Nenner st. $(1-x)^2$ l. $(1-x)^3$. Z. 9 st. 253) l. 353). S. 279. Z. 5 st. $-b$ l. $+b$ S. 288. Z. 12 st. C l. V. S. 293. Z. 5 im zweiten Gliede st. $sin\,(A+C)$. l. $a\,sin\,(A+C)$. S. 294. Z. 3. st. $a\,cos\,2y$ l. $a^2\,cos\,2y$. S. 301. Z. 1 st. 442) l. 444). S. 317. Z. 7 st. $\sqrt{}(a^2-b^2$ l. $\sqrt{}(a^2-b^2)$ Z. 8 im Nenner st. $\sqrt{}(a^2-b)$ l. $\sqrt{}(a^2-b^2)$. S. 326. Z. 5 st. BMT l. BMt. S. 328. Z. 8 u. st. ab l. 2b. S. 354 Z. 11 st. D l. C'. S. 356. Z. 5 st. 20 l. 21. S. 370. Z. 12 u. st. E l. F. S. 418. Z. 1 u. st. B'' l. B'. S. 421. Z. 6 st. a'b l. a'b. S. 422. Z. 7 u. st. $\beta''\gamma'$ l. β'', γ''. Ein X fehlt in den Figuren 9, 31, 32: ein M in 11 und X in 32.

Inhalt.

Einleitung.

		Seite.
I.	Teilbarkeit der Zahlen	1
II.	Konstruktion der Faktorentafeln	6
III.	Versetzungen und Verbindungen der Größen	9
IV.	Der binomische Lehrsatz	16
V.	Der Fermat'sche Lehrsatz	28
VI.	Versetzungen und Verbindungen mit Wiederholungen	31
VII.	Die Wahrscheinlichkeitsrechnung	35
VIII.	Zinseszinsen, Lebensrenten	47
IX.	Kettenbrüche	56
X.	Die unbestimmte Analytik	71
XI.	Elimination der Gleichungen	91

Erstes Buch.

Methode der unbestimmten Koeffizienten.

I.	Formen der Funktionen	96
II.	Kennzeichen konvergirender Reihen	104
III.	Exponential- und logarithmische Funktionen	111
IV.	Goniometrische Hauptfunktionen	116
V.	Goniometrische Hülfsfunktionen	125
VI.	Der Moawr'sche Lehrsatz	129
VII.	Die höheren Gleichungen	138
VIII.	Transformation der Gleichungen	152

*

		Seite.
IX.	Der Koteſiſche Lehrſatz	164
X.	Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades	167
XI.	Arithmetiſche Reihen	174
XII.	Rekurrente Reihen	182

Zweites Buch.

Differential- und Integralrechnung.

I.	Leibnitzens Infinitesimalrechnung	190
II.	Theorien der Differentialrechnung	195
III.	Die partiellen Differentiale	201
IV.	Der Tellor'ſche Lehrſatz	207
V.	Der Mekloren'ſche Lehrſatz	212
VI.	Beſtimmung der in $\frac{0}{0}$ übergehenden Funktionen	213
VII.	Größte und kleinſte Werthe der Funktionen	215
VIII.	Zerlegung gebrochener Funktionen	226
IX.	Elementar-Integrale	233
X.	Integration algebraiſcher Differentiale	239
XI.	Die theilweiſe Integration	248
XII.	Integration der Differentialgleichungen	257
XIII.	Summirung der Reihen	267

Drittes Buch.

Die Kurven mit einfacher Krümmung.

I.	Beſtimmung der Lage eines Punktes in der Ebene	277
II.	Transformation der Koordinaten	280
III.	Linien der erſten Ordnung	283
IV.	Polygonometrie und Trigonometrie	289
V.	Linien der zweiten Ordnung	298
VI.	Mittelpunkt und Durchmeſſer dieſer Linien	302
VII.	Polargleichungen dieſer Linien	314
VIII.	Tangenten krummer Linien	321
IX.	Berührungsordnungen krummer Linien	330

		Seite.
X.	Rektifikation, Evolution und Quadratur	336
XI.	Tangenten, Krümmungshalbmesser, Rektifikation und Quadratur bei Polarkoordinaten	347
XII.	Besondere Punkte krummer Linien	351
XIII.	Linien höherer Ordnungen	355
XIV.	Transcendente Kurven	363

Viertes Buch.

Flächen und Kurven mit doppelter Krümmung.

I.	Lage eines Punktes im Raume	374
II.	Transformation der Koordinaten	378
III.	Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie	382
IV.	Sphärische Dreiecke	387
V.	Gleichungen einer Geraden im Raume	407
VI.	Flächen der ersten Ordnung	411
VII.	Eigenschaften der Projektionen	420
VIII.	Flächen der zweiten Ordnung	423
IX.	Flächen, welche einen Mittelpunkt haben	427
X.	Kegelschnitte	433
XI.	Flächen ohne einen Mittelpunkt	436
XII.	Die Kurven mit doppelter Krümmung	439
XIII.	Berührung und Komplanation der Flächen	445
XIV.	Inhalt der durch krumme Flächen eingeschlossenen Körper	452
XV.	Komplanation und Kubatur bei Polarkoordinaten	459
	Anmerkungen und Zusätze	461

Tafeln.

Tafel der Binomialkoeffizienten	19
Potenzen der Zahlen 2, 3 und 5	31
Sterblichkeit- und Bevölkerungs-Tafel	45
Perioden quadratischer Reste	77
Perioden des eine Quadratwurzel ausdrückenden Kettenbruches	90

Seite.

Größe und Anzahl periodischer Dezimalbrüche 462

Hyperbolische Sektoren sammt den Logarithmen ihrer Sinus und Kosinus 467

Längen elliptischer Bogen 470

Nachricht für den Buchbinder.

Die mit den römischen Ziffern paginirten Blätter sind vorne zu binden, hingegen die drei Steintafeln hinter dem Buch so aufzukleben, daß sie beim Aufschlagen ganz herausragen.

Einleitung.

1. Theilbarkeit der Zahlen.

1. Im dekadischen Zahlensysteme, wo zehn Einheiten irgend einer Ordnung immer eine Einheit der nächst höheren Ordnung betragen, ist die Größe 10^n der gemeinschaftliche Faktor aller auf die nte Stelle folgenden höheren Stellen einer Zahl, und eben so sind

$$10^{2n},\ 10^{3n},\ 10^{4n} \text{ u. s. f.}$$

die gemeinschaftlichen Faktoren, der auf die

2nte, 3nte, 4nte Stelle u. s. f.

beziehungsweise folgenden höheren Stellen derselben Zahl; theilt man daher eine Zahl von der rechten zur linken Hand in Klassen ein, indem man auf jede derselben n Stellen zählt, und bezeichnet die numerischen Werthe der auf einander folgenden Klassen mit den Buchstaben

$$a, b, c, d, e, \ldots l$$

so ist der allgemeine Ausdruck einer solchen Zahl

$$N = a + b.10^n + c.10^{2n} + d.10^{3n} + \ldots + l.10^{kn} \ldots 1)$$

wo l die letzte $(k+1)$te Klasse vorstellt.

2. Sei $10^n - 1$ durch p theilbar, mithin

$10^n = Ap + 1$, also

$10^{2n} = (Ap+1)^2 = p(A^2 p + 2A) + 1$, und wenn man

zur Abkürzung die Größe $A^2 p + 2A = B$ setzt,

$10^{2n} = Bp + 1$, daher

$10^{3n} (Ap + 1)(Bp + 1) = p(ABp + A + B) + 1$
und $ABp + A + B = C$ gesetzt, wird

$10^{3n} = Cp + 1$, : eben so ist

$10^{4n} = Dp + 1$ u. s. f.
und allgemein ist

$10^{kn} = Kp + 1$, wo K irgend eine ganze Zahl bedeutet:
substituirt man diese für 10^n, 10^{2n}, 10^{3n} .... gefundenen Werthe in der Formel 1); so wird

$N = a + b(Ap + 1) + c(Bp + 1) + d(Cp + 1) + \ldots + l(Kp + 1)$, oder wenn man reducirt

$\alpha) \ldots N = p(Ab + Bc + Cd + \ldots + Kl) + a + b + c + d + \ldots + l$

3. Sei ferner $10^n + 1$ durch q theilbar, also

$10^n = Aq - 1$, so ist

$10^{2n} = (Aq - 1)^2 = q(A^2 q - 2A) + 1$,
$= Bq + 1$ zur Abkürzung,

$10^{3n} = (Aq - 1)(Bq + 1) = q(ABq + A - B) - 1$
$= Cq - 1$

$10^{4n} = (Aq - 1)(Cq - 1) = q(ACq + A - C) + 1$
$= Dq + 1$, und eben so

$10^{5n} = Eq - 1$, und allgemein

$10^{kn} = Kq \pm 1$, je nachdem K eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt; man erhält daher nach der Substitution dieser Ausdrücke in der Formel 1)

$N = a + b(Aq - 1) + c(Bq + 1) + d(Cq - 1) + e(Dq + 1) + \ldots + l(Kq \pm 1)$

oder, wenn man reducirt

$$\beta) \ldots N = q(Ab + Bc + Cd + De + \ldots + Kl) + a - b + c - d + e - \ldots \pm 1$$

Versteht man, unter nziffriger Klassensumme den Ausdruck $a + b + c + d + \ldots + 1$ hingegen unter nziffriger Klassendifferenz den Unterschied zwischen der Summe aller Klassen an den geraden Stellen, und der Summe aller Klassen an den ungeraden Stellen, sonach den Ausdruck

$$a - b + c - d + e - \ldots \pm 1$$

so geben die Formeln α) und β) den Satz: Jede Zahl deren nziffrige Klassensumme mit $10^n - 1$, oder deren nziffrige Klassendifferenz mit $10^n + 1$ einen gemeinschaftlichen Faktor hat, läßt sich durch diesen Faktor ohne Rest theilen. Ist aber eine nziffrige Klassendifferenz Null, so hat die zugehörige Zahl, alle Faktoren mit $10^n + 1$ gemein.

4. Bei der Anwendung dieses Satzes auf besondere Fälle ergeben sich folgende Kennzeichen der Theilbarkeit:

Für $n = 1$, hat man $10^n - 1 = 9$, also $p = 3$, oder $p = 9$, und $10^n + 1 = 11$, daher $q = 11$, dieß gibt die bekannte Regel: Jede Zahl, deren Ziffernsumme sich durch 3 oder 9 theilen läßt, ist durch dieselbe Zahl theilbar, hingegen ist eine Zahl durch 11 theilbar, wenn ihre Zifferndifferenz (einziffrige Klassendifferenz) 11 zum Faktor hat.

Für $n = 2$, erhält man $10^n - 1 = 99 = 9.11$, welches keine neuen Ergebnisse liefert, allein es wird

$10^n + 1 = 101$, mithin $q = 101$; hiernach ist jede Zahl durch 101 theilbar, deren zweiziffrige Klassendifferenz diese Zahl zum Faktor hat.

Für $n = 3$ folgt $10^n - 1 = 999 = 37.27$, also $p = 37$, und $10^n + 1 = 1001 = 7.11.13$, mithin $q = 7$, oder $q = 13$; demnach ist jede Zahl durch 37 theilbar, wenn ihre dreiziffrige Klassensumme sich hiedurch theilen läßt, hingegen ist sie durch 7 oder 13 theilbar, je nachdem ihre dreiziffrige Klassendifferenz 7 oder 13 zum Faktor hat.

5. Mittelst dieser einfachen Regel, wird die Theilbarkeit einer jeden Zahl durch 7, 13 oder 37 auf die Theilbarkeit einer dreiziffrigen Zahl durch dieselben Faktoren zurückgeführt. Gibt man dieser letzteren Zahl die Form $a + 10b = a + 3b + 7b$, so erhellet, daß sie durch 7 theilbar, sobald es $a + 3b$ ist, d. i. wenn $b = 2a + 7c$ wird; es ist also eine dreiziffrige Zahl durch 7 theilbar, wenn der Unterschied ihrer zwei höheren Ziffern und des in ihnen enthaltenen Vielfachen von 7 doppelt so groß ist, als ihre Endziffern z. B. die Zahl

17261514039

in dreiziffrige Klassen getheilt, gibt

$17 + 514 - 261 - 039 = 531 - 300 = 231$

es ist aber $23 = 21 + 2$, und da der Rest 2 die Endziffer 1 zweimahl enthält, so ist die Zahl 231, folglich auch die gegebene Zahl selbst durch 7 theilbar.

In Beziehung auf den Faktor 13 hat man

$$\frac{a + 10b}{13} = \frac{a - 3b}{13} + b$$

und $a - 3b$ oder $3b - a$ ist durch 13 theilbar, wenn

$$b = \frac{a}{3}, \text{ oder } b = \frac{a + 13c}{3} \text{ gesetzt wird;}$$

es ist also eine dreiziffrige Zahl durch 13 theilbar, wenn der Unterschied ihrer zwei höheren Ziffern und dem Vielfachen von 13 ein Drittel der nöthigen Falls um 13 vergrößerten Endziffer beträgt.

6. Für $n = 4$, wird $10^n + 1 = 10001 = 73.137$: daher sowohl $q = 73$, als auch $q = 137$ zu setzen ist; hieraus folgt: Jede Zahl deren vierziffrige Klassendifferenz durch 73 oder 137 theilbar ist, läßt sich durch diese Zahlen beziehungsweise theilen.

Für $n = 5$ erhält man $10^n - 1 = 99999 = 9.41.271$, also $p = 41$, und auch $p = 271$, ferner hat man $10^n + 1 = 100001 = 11.9091$, dieß gibt die Regel: jede Zahl, deren fünfziffrige Klassensumme durch 41 oder 271, oder deren fünfziffrige Klassendifferenz durch 9091 theilbar ist, läßt sich durch diese Zahlen beziehungsweise theilen.

7. Vereinigt man vorstehende Regeln mit den bekannten Kennzeichen der Theilbarkeit einer Zahl durch 2 und 5, so kann man die Zerfällung einer Zahl in Faktoren in den meisten Fällen bewirken, in anderen Fällen wird man jedoch die Faktorentafeln zu Rathe ziehen müssen, unter denen die folgenden:

Table des diviseurs pour tous les nombres des 1er, 2e et 3e million. Par J. Ch. Burckhardt. Paris 1817.

Tafeln der einfachen Faktoren aller Zahlen unter Einer Million. Von J. Ph. Kulik. Grätz 1825. am vollständigsten sind. Vergl. Anmerk. a.

II. Konstruktion der Faktorentafeln.

8. So mühsam und weitläufig manchmahl das Verfahren ist, die Faktoren einer Zahl aufzufinden, so leicht ist die umgekehrte Aufgabe, Zahlen zu bestimmen, welche durch eine gegebene Zahl theilbar sind. Folgende Betrachtungen führen auf den einfachsten Weg zur Konstruktion der Faktorentafeln:

Schließt man aus der Reihe der ungeraden Zahlen von 3 an, jede dritte, hierauf von 5 an, jede fünfte Zahl aus, so erhält man folgende durch 2, 3 und 5 nicht theilbare Zahlen:

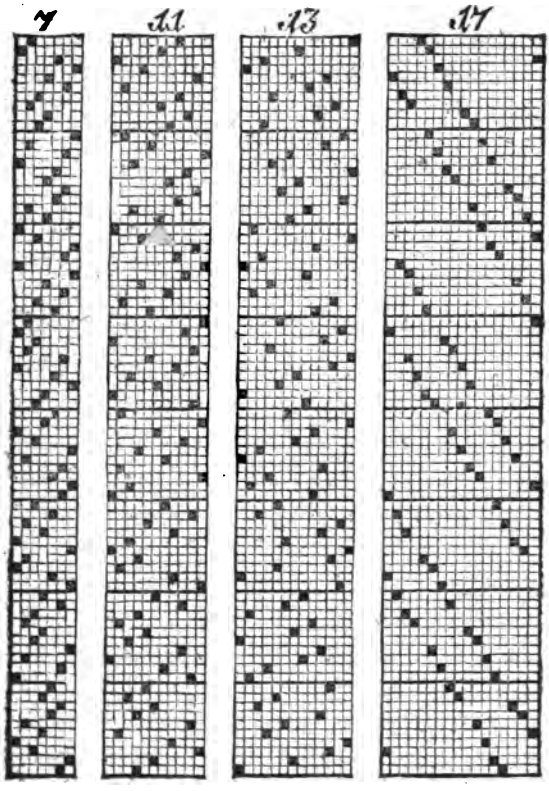
γ) 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67 .... deren Anzahl bis zu irgend einer Zahl N man so findet: es gibt unter den N natürlichen Zahlen nur $N(1-\frac{1}{2}) = N'$ ungerade Zahlen, und unter diesen nur, $N'(1-\frac{1}{3}) = N''$ durch 3, und $N''(1-\frac{1}{5})$ durch 5, nicht theilbare Zahlen, sonach ist die gesuchte Anzahl

$$= N(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5}) = \tfrac{4}{15} N;$$

setzt man hier $N = 300$, so wird $\frac{4}{15} N = 80$, also auf je 300 natürliche Zahlen enthält die Reihe γ) bloß 80 Glieder, und es erhellet von selbst, daß die zwei Endziffern derselben in Perioden von 80 Gliedern wiederkehren, während die höheren Stellen in den auf einander folgenden Perioden eine arithmetische Reihe bilden, die nach der Differenz 3 fortläuft. Man kann daher die Reihe sehr leicht, so weit man will, fortsetzen, wenn man auf einem Blatt Papier 80 horizontale, und eine beliebige Anzahl vertikaler Linien zieht, und die 80 Felder der ersten vertikalen Spalte mit den Gliedern der Reihe γ), hingegen die Felder der obersten horizontalen Zeile mit der arithmetischen Reihe 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...

bezeichnet: da dann jedes Glied, deren Hunderte das höchste Glied der horizontalen Zeile nicht überschreiten, seinen eigenen Platz auf der Tafel erhält, und den man an dem Orte findet, wo die den Hunderten zugehörige vertikale, mit der horizontalen durch die Endziffern des gegebenen Gliedes bezeichneten Zeile, zusammentrifft.

9. Ist r eine Primzahl, so erscheint sie als Faktor jedes rten Gliedes der Reihe γ) von r anzufangen, mithin bei einer Anzahl von Gliedern $\frac{1}{r} \cdot \frac{4}{15} N$; woraus folgt, daß in $N = 300r$ Zahlen, 80 Glieder der Reihe durch r theilbar sind, und die je r vertikale Spalten der Tafel beständig in derselben Ordnung auf einander folgen. Hat man daher durch die Addition der Vielfachen von r, wie sie die Differenzen der Reihe γ) mit sich bringen, die ersten 80 durch r theilbaren Zahlen gefunden, und in der Tafel eingetragen, so ergeben sich schon alle folgenden Zahlen dieser Art ohne alle Rechnung: Man wählt hiezu ein den r Spalten der Tafel gleiches Stück Papier, verzeichnet darauf die Lage dieser Zahlen so, wie sie in der Tafel erscheinen, und schneidet in jeder derselben eine Oeffnung aus, daß immer ein Feld der Tafel hindurch sichtbar wird; ein solches Netz wird hierauf nach und nach an die rte, 2rte, 3rte Spalte u. s. f. gehörig angelegt, und die innerhalb desselben zum Vorschein kommenden Felder der Tafel mit dem Faktor r bezeichnet. Auf der folgenden Vignette ersieht man die zugehörigen Netze für die Zahlen 7, 11, 13, 17, wo die durchbrochenen Felder schwarz überzogen erscheinen, und man kann leicht bemerken, daß dieselben in Beziehung auf die mittlere horizontale Linie symmetrisch geordnet sind.



10. Hat man eine Faktorentafel von groſser Ausdehnung im Sinne, so ist es vortheilhaft, die Tafel sammt den in 77 vertikalen Spalten eingetragenen Faktoren 7 und 11 in Druck zu legen, und sich hievon eine Anzahl Abdrücke machen zu lassen, weil von diesen am häufigsten vorkommenden Faktoren, jener je 7, dieser je 11, mithin beide je 7. 11 = 77 Spalten genau in derselben Ordnung sich wiederholen. Man bestimme hierauf mittelst der zugehörigen Netze (9) die durch 13 und alle folgenden Primzahlen nach einander theilbaren Zahlen, wie so eben

gezeigt wurde, bis man auf eine Primzahl A kömmt, welche nächst größer ist, als $\sqrt{\frac{1}{2}N}$, wo N die Grenze bedeutet, bis zu welcher die Faktorentafel sich erstrecken soll. Man suche nun die Unterschiede zwischen den auf A folgenden Primzahlen, und addire zu A^2 nach einander die geraden Vielfachen von A, in der Ordnung, wie sie jene Unterschiede verlangen, suche die Ergebnisse in der Tafel auf, und bezeichne die zugehörigen Oerter mit dem Faktor A, und eben so verfahre man, mit den auf A folgenden Primzahlen, bis zu einer Zahl M, die zunächst kleiner ist als $\sqrt{N}$, wodurch die Arbeit ihr Ende erreicht — die dann noch in der Tafel leer bleibenden Felder gehören den Primzahlen an.

III. Versetzungen und Verbindungen der Größen.

§ 11. Wenn man mehrere Buchstaben a, b, c, d... oder auch mehrere Ziffern 1, 2, 3 ... oder andere Symbole in ein Glied neben einander schreibt, so heißt ein jedes so entstehende Ganze eine Zusammenstellung (Komplexion), deren Theile die Elemente, und die Anzahl der gewählten Elemente der Zeiger. Hat man einmahl die Rangordnung der Elemente festgesetzt, welche bei den Buchstaben die alphabetische, bei den Zahlen die natürliche, ist; so ist hiedurch auch der Werth einzelner Zusammenstellungen gegeben: man nennt nämlich ein Element ein höheres, welches in der Reihe der Elemente weiter gelegen ist, das ihm vorangehende ein niedrigeres Element, und unter zwei Zusammenstellungen, wenn sie von der Linken zur Rechten stellenweise verglichen werden, heißt diejenige die höhere, in welcher die erste der verschieden besetzten Stellen ein höheres Element einnimmt. Wenn die Zusammenstellun-

gen so auf einander folgen, daß nie eine niedrigere einer höheren nachsteht, so sagt man, daß sie gut geordnet sind.

12. Will man die gegebenen Elemente nach irgend einem Zeiger, so oft als es möglich ist, in einer andern Ordnung auf einander folgen lassen, so heißen die Zusammenstellungen Versetzungen (Permutationen): wenn man dagegen die Zusammenstellungen, so oft es angeht, aus verschiedenen Elementen bildet, so nennt man sie Verbindungen (Kombinationen).

13. Um aus den gegebenen Elementen alle möglichen gut geordnete Versetzungen nach irgend einem Zeiger n zu erhalten, bestimme man zuerst die niedrigste Versetzung, indem man die n ersten Elemente ihrem Range gemäß zusammenstellt, und man findet aus ihr, und eben so aus jeder anderen Versetzung die nächst höhere, wenn man die entfernteste Stelle, in welche ein höheres Element gebracht werden kann, damit besetzt, und hierauf die folgenden Stellen in ihrer natürlichen Ordnung an einander reihet. Auf diese Weise gelangt man stuffenweise zu immer höheren Versetzungen, bis nicht die letzten n Elemente in verkehrter Ordnung zum Vorschein kommen, wodurch sich die höchste Versetzung zu erkennen gibt. Bei den Verbindungen, wird zwar auch die entfernteste Stelle, welche ein höheres Element aufnehmen kann, damit besetzt, allein die darauf folgenden Stellen müssen die nächst höheren Elemente erhalten, damit die Rangordnung derselben in einzelnen Verbindungen nicht gestört wird. Die höchste Verbindung nach n, wird sonach die n letzten Elemente in ihrer festgesetzten Aufeinanderfolge enthalten. Z. B. Aus den Elementen 1, 2, 3, 4 gibt es Versetzungen nach vier:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

dagegen Verbindungen nach drei: 123 124 134 234

14. Bei gut geordneten Versetzungen der gegebenen m Elemente nach n, erscheinen zuerst Glieder, die mit dem ersten Elemente anfangen, dann kommen jene, die das zweite, dritte, mte Element an der Spitze haben: hiebei enthalten sämmtliche Glieder, welche mit irgend einem gemeinschaftlichen Element anfangen, alle möglichen Versetzungen der übrigen m — 1 Elemente nach n — 1 gut geordnet, weil zur Bildung der Versetzungen alle Elemente auf eine und dieselbe Art beitragen, und mithin jedes derselben in eine bestimmte Stelle so oft zu stehen kommt, als die übrigen; es gibt sonach m Gruppen von Versetzungen, die mit einem gemeinschaftlichen Anfangselemente versehen sind. Bezeichnet man nun die Zahl aller möglichen Versetzungen von m Elementen nach dem Zeiger n mit [m, n], und von m — 1 Elementen nach dem Zeiger n — 1 mit [(m — 1), (n — 1)]; so ist $[m, n] = m\,[(m-1), (n-1)]$

Es ist aber die Anzahl der Versetzungen von m — 1 Elementen nach 1 nur m — 1, sonach hat man

$[m, 2] = m\,[(m-1), 1] = m\,(m-1)$, und eben so

$[m, 3] = m\,[(m-1), 2]$, aber $[(m-1), 2] = (m-1)(m-2)$, daher ist

$[m, 3] = m\,(m-1)\,(m-2)$, hieraus ergibt sich ferner

$[m, 4] = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)$, und allgemein

$[m, n] = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots(m-n+1)\ldots 2)$

Macht man hier n = m, so wird

$[m, m] = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots 3\,.\,2\,.\,1$

ein Ausdruck, den wir nach Kramp Kürze halber mit m! bezeichnen werden; es ist also die Anzahl aller

möglichen Versetzungen für m verschiedene Elemente nach m, oder $[m, m] = m! \ldots 3)$

15. Die Menge der Verbinduugen zu finden, welche aus m Elementen nach dem Zeiger n gebildet werden können, gedenke man sich dieselben in eine horizontale Zeile neben einander geschrieben, ihre Anzahl werde mit $\binom{m}{n}$ bezeichnet, wobei die obere Zahl immer die Zahl der zu verbindenden Elemente, die untere aber den Zeiger, oder die Zahl derselben in einzelnen Verbindungen, angibt. Man setze hierauf unter das erste Glied der horizontalen Reihe, welches die niedrigste Verbindung enthält, alle Versetzungen, die aus denselben Elementen, welche in der Verbindung vorkommen, entstehen können, so erhält man eine vertikale Reihe mit [n, n] Gliedern: verfährt man eben so mit dem zweiten und den folgenden Gliedern der horizontalen Reihe, so ergeben sich $\binom{m}{n}$ vertikale Reihen zu [n, n] Gliedern, in welchen sämmtliche Versetzungen erscheinen, die sich aus m Elementen je n derselben bilden lassen, nun ist die letztere Zahl $= [m, n]$, sonach hat man $\binom{m}{n} = \frac{[m, n]}{[n, n]}$, und wegen 2) und 3), wird $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \ldots 4)$

16. Die Verbindungszahlen haben mehrere merkwürdige Eigenschaften, mit denen wir uns nun bekannt machen wollen. Setzt man im Ausdrucke 4) $m-n$ an die Stelle von n, so folgt statt $m-n+1$ die Größe $m-(m-n)+1 = n+1$, mithin ist

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)} \ldots\ldots 5)$$

bringt man nun beide Ausdrücke 4) und 5) auf den ge-

meinschaftlichen Nenner, so wird der Zähler von

$$\binom{m}{n} = (m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)$$
$$= m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

und der Zähler von

$$\binom{m}{m-n} = m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)n\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

daher ist immer $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \ldots 6)$ z. B. 100 Größen je 68 und je 32 verbunden geben dieselbe Anzahl von Verbindungen.

Man hat ferner dem Ausdrucke 4) gemäß

$$\binom{m}{n-1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}$$

und diesen Werth in 4) gesetzt, wird

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{n-1}\cdot\frac{m-n+1}{n} \quad \ldots 7)$$

hiernach ist

$$\binom{m}{2} = \binom{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}, \binom{m}{3} = \binom{m}{2}\cdot\frac{m-2}{3}, \binom{m}{4} = \binom{m}{3}\cdot\frac{m-3}{4}$$

u. s. f.; man kann daher, wenn die Zeiger nach den natürlichen Zahlen fortlaufen, die zugehörigen Verbindungszahlen bei derselben Anzahl von Elementen stuffenweise von einander ableiten. Z. B. In der bekannten Zahlenlotterie werden 90 Nummern in ein Behältniß gethan, und daraus 5 gezogen: die Anzahl aller möglichen Amben ist sonach $\frac{1}{2}\cdot 89\cdot 90 = 4005$,
aller möglichen Ternen $= \frac{1}{3}\cdot 88\cdot 4005 = 117480$
aller Quaternen $= \frac{1}{4}\cdot 87\cdot 117480 = 2555190$, und
aller Quinternen $= \frac{1}{5}\cdot 86\cdot 2555190 = 43949268$; während aus den gezogenen 5 Nummern nur $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5 = 10$ Amben,

$\frac{1}{3}.3.10 = 10$ Ternen, $\frac{1}{4}.2.10 = 5$ Quaternen, und $\frac{1}{5}.5 = 1$ Quinterne möglich ist.

17. Da $\binom{m}{n} = \binom{m}{n-1}\frac{m-n+1}{n}$ ist, so hat man auch $\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \binom{m}{n-1}\left(1+\frac{m-n+1}{n}\right)$

$= \binom{m}{n-1}\left(\frac{m+1}{n}\right)$: nun ist

$$\frac{m+1}{n}\cdot\binom{m}{n-1} = \frac{(m+1)\,m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,n}$$

$= \binom{m+1}{n}$, daher ist $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$ ... 8)

mittelst welcher Gleichung die Verbindungszahl für $m+1$ Elemente aus zwei auf einander folgenden Verbindungszahlen von m Elementen bestimmt werden kann.

Man hat ferner $\binom{k}{r} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}$,

und $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,k}$, da aber der Zähler des ersten Bruches im Nenner des zweiten als Faktor enthalten ist, so wird

$$\binom{k}{r}\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(k-r).1.2.3\ldots r}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(k-r)}\cdot\times$$

$$\frac{(n-k+r)(n-k+r-1)\ldots(n-k+1)}{1\quad.\quad2\quad.\quad.\quad.\quad r}$$

nämlich, es ist

$$\binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{k-r}\binom{n-k+r}{r} \ldots 9)$$

18. Die Faktoren $m, \frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{3}(m-2)\ldots$ im Ausdrucke 3), haben immer kleinere Zähler aber größere Nenner, da-

her nehmen die Produkte beständig zu, bis nicht einer der Faktoren etwa $\frac{m-i+1}{i} = 1$, d. i. bis nicht $i = \frac{m+1}{2}$ wird, da sie dann der Formel 6) gemäß in verkehrter Ordnung zum Vorschein kommen; es ist also unter den Verbindungszahlen die aus m Elementen nach verschiedenen Zeigern möglich sind, diejenige die größte, welche dem Werthe $i = \frac{1}{2}(m \pm 1)$ zugehört. Ist nämlich m ungerade, so ist $i = \frac{1}{2}(m+1)$ eine ganze Zahl, aber dann wird $\frac{m-i+1}{i} = 1$, folglich bleibt das vorhergehende $(i-1)$te Glied ungeändert, und es gibt zwei einander gleiche Glieder $\binom{m}{\frac{1}{2}(m \pm 1)}$ die den größten Werth haben: ist aber m gerade, so wachsen die Produkte bis zum mittleren Gliede, für welches $i = \frac{1}{2}m$ ist — ihr größter Werth ist dann $\binom{m}{\frac{1}{2}m}$.

19. Zerfällt man die m Elemente a, b, c, d ... in zwei Gruppen, mit p und m—p Elementen, und bildet aus der ersten Gruppe alle möglichen Verbindungen nach r, aus der andern Gruppe nach n—r, so entstehen beziehungsweise $\binom{p}{r}$ und $\binom{m-p}{n-r}$ Verbindungen. Verbindet man nun diese Glieder beider Gruppen mit einander, so erhält man eine Anzahl Verbindungen k je n Elemente, so daß man hat

$$k = \binom{p}{r}\binom{m-p}{n-r} \quad \ldots 10)$$

Hieraus erhellet z. B. daß unter den Verbindungen von 10 Elementen a, b, c ... nach dem Zeiger 4, keines der drei ersten Elemente a, b, c erscheint $\binom{3}{0}\binom{7}{4} = 35$mahl, eines hingegen $\binom{3}{1}\binom{7}{3}$

$= 105$mahl, zwei Elemente zugleich kommen vor $\binom{3}{2}\binom{7}{2}$ $= 63$mahl, endlich alle drei zugleich $\binom{3}{3}\binom{7}{1} = 7$mahl.

IV. Der binomische Lehrsatz.

20. Entwickelt man nach den bekannten Regeln der Multiplikation das Produkt der Faktoren
$x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, . . .; so erhält man:

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$,

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$,

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+bcd)x+abcd$, u. s. f.

woraus ersichtlich ist, daß das erste Glied im Produkte diejenige Potenz von x ist, welche der Anzahl der Faktoren zugehört, daß ferner die folgenden Glieder Produkte sind, aus den Verbindungen der Elemente, a, b, c, d, . . . nach den Zeigern 1, 2, 3 . . . in die stuffenweise niedrigere Potenzen von x, daß also das letzte Glied das Produkt sämmtlicher Elemente sei.

Gilt daher dieses Gesetz für m Faktoren, und man setzt

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots(x+q)$$
$$= x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots$$
$$+ Kx^{m-n} + Lx^{m-n-1} + \ldots + Px + Q \ldots 11)$$: wo

$A = a+b+c+\ldots q$; $B = ab+ac+\ldots aq+bc+\ldots$;
$C = abc+abd+\ldots abq+\ldots$ u. s. f. so folgt, wenn man diesen Ausdruck Kürze halber mit X bezeichnet,

$X(x+r) = x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots$
$+ Lx^{m-n} + \ldots + rx^m + rAx^{m-1} + rBx^{m-2} + \ldots$
$+ rKx^{m-n} + \ldots + rQ$, oder

$X(x+r) = x^{m+1} + (A+r)x^m + (B+rA)x^{m-1}$
$+ (C+rB)x^{m-2} + \ldots + (L+rK)x^{m-n} + \ldots + rQ$;

es ist also

der 1te Koefficient $= A + r = a + b + c + \ldots + q + r$
der 2te Koeff. $= B + rA = ab + ac + ad + \ldots + aq + bc + \ldots$
$+ ar + br + \ldots$
der 3te $= C + rB = abc + abd + abq + \ldots + abr + \ldots$

und allgemein, da K, L beziehungsweise die Summe aller Verbindungen der m Elemente a, b, c, ... q nach n und n+1 ist, so folgt hieraus, der (n+1)te Koeff. $= L + rK =$ der Summe der Verbindungen der m+1 Elemente a, b, c ... q, r nach n+1, endlich ist das letzte Glied rQ das Produkt sämmtlicher Elemente a, b, c ... q, r; mithin gilt dasselbe Gesetz für m+1 Faktoren, welches man für m Faktoren angenommen hat, nun findet es bei 4 Faktoren Statt, folglich gilt es $m = 4$ gesetzt, für $4+1 = 5$ Faktoren u. s. f.

Sind die Elemente a, b, c ... mit dem Zeichen — behaftet, so werden die Verbindungen nach den ungeraden Zeigern, nämlich die ungeraden Koefficienten A, C, ... negativ, man hat also

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-q) = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots \pm R \mp Q \ldots 12)$$

hiebei bedeuten A, B, C ... P, Q die Summe aller Verbindungen der m Elemente a, b, c .. q nach den Zeigern 1, 2, 3 ... m—1, und m

21. Man setze nun $a = b = c = \ldots = q$, so gehen die Koefficienten A, B, C ... beziehungsweise in $\binom{m}{1}a$, $\binom{m}{2}a^2$, $\binom{m}{3}a^3$ ... über; denn es ist allgemein K in 11) die Summe aller Verbindungen der m Elemente nach n, also wird unter dieser Voraussetzung jede derselben $= a^n$, und da ihre Anzahl $\binom{m}{n}$ ist, so hat man

$$Kx^{m-n} = \binom{m}{n} a^n x^{m-n} \ldots 13)$$

Hiedurch erhält man die unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes bekannte Formel, welche gewöhnlich Newton zugeschrieben wird, nämlich

$$(x+a)^m = x^m + \binom{m}{1}ax^{m-1} + \binom{m}{2}a^2x^{m-2} \ldots$$
$$+ \binom{m}{n}a^n x^{m-n} + \ldots + \binom{m}{1}a^{m-1}x + a^m \ldots . 14)$$

Die Anzahl der Glieder dieses Ausdruckes ist m+1, die Summe der Exponenten in jedem Gliede $= m$, und die vom Anfange und Ende der Reihe gleich weit abstehenden Koefficienten sind, wegen 4) einander gleich: das Glied $\binom{m}{n}a^n x^{m-n}$ nennt man das allgemeine Glied des Ausdrucks, weil aus ihm das 1te, 2te, 3te Glied u. s. f. abgeleitet werden kann, wenn man n nach und nach 1, 2, 3 . . , sein läßt.

22. Nimmt man a negativ, so erhalten alle Glieder mit den ungeraden Potenzen von a ein negatives Zeichen, sonach

$$(x-a)^m = x^m - \binom{m}{1}ax^{m-1} + \binom{m}{2}a^2x^{m-2} - \binom{m}{3}a^3x^{m-3} + \ldots$$
$$\pm \binom{m}{n}a^n x^{m-n} \ldots \pm a^m \ldots . 15)$$

Die Ausdrücke $\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots \binom{m}{n}$ nennt man auch Binomialkoefficienten, und zwar nach ihrem

Zeiger den ersten, zweiten . . . . nten: ihre Werthe ergeben sich aus der Formel 4), wenn man nach und nach n gleich 1, 2, 3 . . . sein läßt.

Tafel der Binomialkoefficienten.

9	36	84	126.						
10	45	120	210	252					
11	55	165	330	462.					
12	66	220	495	792	924				
13	78	286	715	1287	1716.				
14	91	364	1001	2002	3003	3432			
15	105	455	1365	3003	5005	6435.			
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870		
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310.		
18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	
19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378.	
20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756
21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716
22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	705432
23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

4	6								
5	10								
6	15	20							
7	21	35.							
8	28	56	70						

23. Für $x = a = 1$ gibt die Formel 14)

$$\tfrac{1}{2}2^m = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \ldots + \ldots\ldots \quad 16)$$

Dagegen folgt aus der Formel 8) wenn man $m-1$ statt m setzt:

$$\binom{m}{n} - \binom{m-1}{n-1} = \binom{m-1}{n}, \text{ und da } 1 - \binom{m}{1}$$

$$= 1 - m = -\binom{m-1}{1} \text{ ist, so wird hiernach}$$

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} = \binom{m}{2} - \binom{m-1}{1} = \binom{m-1}{2}, \text{ ferner}$$

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} = -\binom{m}{3} + \binom{m-1}{2} = -\binom{m-1}{3},$$

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} = \binom{m}{4} - \binom{m-1}{3} = \binom{m-1}{4},$$

also allgemein

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots \pm \binom{m}{n} = \pm \binom{m-1}{n} \quad \ldots 17)$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt.

24. Die Formel 14) gibt, wenn man a und z mit x und a vertauscht, und im allgemeinen Gliede m—n statt n schreibt

$$(a+z)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} z \ldots + \binom{m}{m-n} a^{m-n} z^n + \ldots$$

ist nun $z = b+c+d+e+\ldots+k$, so erhält man hieraus den Ausdruck für das Polynom $(a+b+c+\ldots+k)^m$; man setze, $c+d+e+\ldots+k = y$, also $z = b+y$, so ist das allgemeine Glied in z^n oder $(b+y)^n$ gleich $\binom{n}{n-p} b^{n-p} y^p$: macht man nun $d+e+\ldots+k = x$, also $y = c+x$, so wird das allgemeine Glied in y^p oder $(c+x)^p$ gleich $\binom{p}{p-q} c^{p-q} x^q$: fährt man so fort, die nachfolgenden Glieder des Polynoms durch einzelne Buchstaben zu bezeichnen bis das letzte Glied k an die Reihe kommt, so ist klar, daß man für das allgemeine Glied des Polynoms $(a+b+c+d+e+\ldots+k)^m$ den Ausdruck erhält

$$N = \binom{m}{m-n}\binom{n}{n-p}\binom{p}{p-q}\binom{q}{q-r}\ldots \times a^{m-n} b^{n-p} c^{p-q} d^{q-r} \ldots\ldots k^t$$

wobei die Summe der Exponenten in sämmtlichen Faktoren m beträgt. Es ist aber nach 5) und 3)

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{(m-n)!}, \binom{n}{n-p} = \frac{n(n-1)\ldots(p+1)}{(n-p)!}$$

u. s. f. daher wird der Zähler im Produkte

$$\binom{m}{m-n}\binom{n}{n-p}\binom{p}{p-q}\ldots = m!$$

sonach hat man

$$N=\frac{m!\,a^{m-n}b^{n-p}c^{p-q}d^{q-r}\ldots k^{t}}{(m-n)!\,(n-p)!\,(p-q)!\,(q-r)!\ldots t!}\quad\ldots\ 18)$$

Z. B. im Trinom $(a+b+c)^{10}$ ist eines der Glieder

$$\frac{1.2.3.4\ldots10\,a^5b^3c^2}{1.2.3.4.5\times1.2.3\times1.2}=2520\,a^5b^3c^2$$

und denselben numerischen Koefficienten haben auch die Glieder $a^5b^2c^3$, $a^3b^5c^2$, $a^3b^2c^5$, $a^2b^5c^3$ und $a^2b^3c^5$

25. Wir haben nun noch zu zeigen, daß die Formel 14) auch in dem Falle gelten muß, wenn m eine negative, gebrochene oder irrationale Zahl bedeutet. Verwechselt man a mit x und setzt dann $a=1$, und $x=z$, so folgt aus dieser Formel

$$(1+z)^m=1+mz+\binom{m}{2}z^2+\binom{m}{3}z^3+\ldots\binom{m}{n}z^n+..19)$$

Seien nun m, n beliebige Größen, und

$P=1+mz+\binom{m}{2}z^2+\binom{m}{3}z^3+\ldots$.

$Q=1+nz+\binom{n}{2}z^2+\binom{n}{3}z^3+\ldots$ endlich nehme man

$PQ=1+pz+\binom{p}{2}z^2+\binom{p}{3}z^3+\ldots$; so ist in dem Falle daß m, n ganze positive Zahlen bedeuten, wegen 19)

$P=(1+z)^m$, $Q=(1+z)^n$; also $PQ=(1+z)^{m+n}$, mithin $p=m+n$, und die für PQ angenommene Form ist dann gewiß giltig; allein das Produkt zweier Polynome P und Q wird nach den Gesetzen der Multiplikation auf einerlei Art gebildet, wie auch immer die Werthe ihrer Glieder beschaffen sein mögen; daher wird das Produkt PQ auch in dem Falle diese Form behalten, wenn m oder n eine gebrochene oder negative Zahl vorstellt.

Sei nun m eine ganze negative Zahl, man nehme $n=-m$, so wird n eine ganze positive Zahl bedeuten,

wodurch $Q=(1+z)^n$, $p=o$, und $PQ=1$ wird; hieraus folgt

$$P=\frac{1}{Q}=\frac{1}{(1+z)^n}=(1+z)^{-n}=(1+z)^m$$

also gilt die Formel 19) auch für einen ganzen negativen Exponenten.

Ist m ein Bruch, so setze man $m=n$, wodurch $p=2m$, und $PQ=P^2$ wird, man erhält sonach $P^2=1+2mz+\binom{2m}{2}z^2+\ldots$; hieraus folgt, wenn man diesen Werth im Produkte PQ statt des einen Faktors setzt, und den anderen Faktor $=P$ sein läßt, $p=3m$, daher $P^3=1+3mz+\binom{3m}{2}z^2+\ldots$, und allgemein $P^r=1+mrz+\binom{mr}{2}z^2+\ldots$

Nimmt man nun r dem Nenner des Bruches m gleich, so ist mr eine ganze Zahl, für welche nach 19) $1+mrz+\binom{mr}{2}z^2+\ldots=(1+z)^{mr}$, man hat also $P^r=(1+z)^{mr}$, oder $P=(1+z)^m$, mithin gilt die Formel 19) auch für gebrochene Exponenten.

Ist endlich m irrational so läßt sich immer ein Bruch n angeben, der die Größe m, und sonach auch die von ihr abhängenden Binomialkoefficienten $\binom{m}{2}, \binom{m}{3}\ldots$ so genau ausdrückt, daß der Unterschied $m-n$ kleiner wird als jede noch so kleine angebliche Größe ω, hiedurch zerfällt $(1+z)^m$, in $(1+z)^n$ und $(1+z)^{\omega}$: wo $(1+z)^{\omega}$ $=1+\omega z+\binom{\omega}{2}z^2+\ldots$ sich der Einheit desto mehr nähert, je näher n an m liegt, man hat also auch in diesem Falle, $(1+z)^m=(1+z)^n=1+nz+\binom{n}{2}z^2+\ldots$ $=1+mz+\binom{m}{2}z^2+\ldots$ Man pflegt bei Rechnun-

gen die Ausdrücke mit unmöglichen Exponenten nach eben denselben Regeln zu behandeln wie die reelen Größen; sofern nun die imaginäre Form denselben nur scheinbar zukommt, und daher nach gehöriger Reduktion gehoben werden kann, bleibt gegen das Verfahren nichts Erhebliches einzuwenden.

26. In allen diesen Fällen lauft die Reihe $(1+z)^m$ ohne Ende fort, weil kein Koefficient wie $\binom{m}{r}$ null werden kann: denn es ist nach 4)

$$\binom{m}{r}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r}$$

und es kann sich m, wenn es negativ, gebrochen, irrational oder unmöglich ist, nie gegen eine ganze Zahl r—1 aufheben, wodurch der Faktor m—r+1 null würde.

27. Bei der Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf die Entwickelung beliebiger Potenzen zweitheiliger Ausdrücke ist es vortheilhaft der Reihe 14) eine solche Gestalt zu ertheilen, daß sich immer jedes folgende Glied, aus dem unmittelbar vorhergehenden ableiten läßt. Zu diesem Ende bezeichne man im Ausdrucke $(x+a)^{\frac{p}{q}}$, den man aus 14) erhält, wenn man durchgängig $m=\frac{p}{q}$ setzt, die auf einander folgenden Glieder mit A, B, C ...., und setze $\frac{a}{x}=Q$, so wird $x^{\frac{p}{q}}=A$, $\frac{p}{q}AQ=B$, $\frac{p-q}{2q}BQ=C$, $\frac{p-2q}{3q}CQ=D$, u. s. f. daher ist

$$(x+a)^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{p}{q}}+\frac{p}{q}AQ+\frac{p-q}{2q}BQ+\frac{p-2q}{3q}CQ+\ldots 20)$$

Um hiernach z. B. $(\frac{1}{2}b+2y)^5$ zu bestimmen, hat man $x=\frac{1}{2}b$, $a=2y$, also $Q=\frac{4y}{b}$ und $p=5$, $q=1$, mithin

$A=(\frac{1}{2}b)^5=\frac{1}{32}b^5$; $B=\frac{5}{1}AQ=\frac{5}{8}b^4y$; $C=5b^3y^2$;
$D=20b^2y^3$; $E=40by^4$; endlich $F=32y^5$, daher
$(\frac{1}{2}b+2y)^5=\frac{1}{32}b^5+\frac{5}{8}b^4y+5b^3y^2+20b^2y^3+40by^4+32y^5$.

Eben so findet man

$$\sqrt{(a^2\pm x^2)}=a\left(1\pm\frac{x^2}{2a^2}-\frac{1\cdot x^4}{2\,4a^4}\pm\frac{1.3x^6}{2.4.6a^6}-\frac{1.3.5x^8}{2.4.6.8a^8}\pm\ldots\right)\ 21)$$

Für $a=1$, und $x=y$ wird hieraus

$$\sqrt{(1\pm y^2)}=1\pm\frac{y^2}{2}-\frac{1\cdot y^4}{2.4}\pm\frac{1.3y^6}{2.4.6}-\frac{1.3.5y^8}{2.4.6.8}\pm\ldots\ 22)$$

Ferner erhält man auf demselben Wege

$$(a^2\pm x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}\left(1\mp\frac{x^2}{2a^2}+\frac{1.3x^4}{2.4a^4}\mp\frac{1.3.5x^6}{2.4.6a^6}+\ldots\right)\ldots 23)$$

§ 28. Man kann den binomischen Lehrsatz auf die Bestimmung der irrationalen Wurzel aus einer Zahl N mit Vortheil anwenden, wenn man $N=x^r\pm a$ setzt, wodurch $\sqrt[r]{N}=(x^r\pm a)^{\frac{1}{r}}$ wird, und man erhält für $p=1, q=r$ aus 20)

$$\sqrt[r]{N}=x\pm\frac{1}{r}AQ-\frac{r-1}{2r}BQ\pm\frac{2r-1}{3r}CQ-\ldots\ 24)$$

wo die Größen A, B, C ... Q obige Bedeutung haben: um die Operation zu erleichtern, muß man Sorge tragen, für x einen schon angenäherten Werth der Wurzel zu setzen, den man gemeiniglich durch Logarithmen finden kann, da dann Q und die Glieder B, C, D ... schnell abnehmende Brüche bedeuten müssen.

Setzt man aber $\sqrt[r]{N}=x+y$, wo x einen schon genäherten Werth der Wurzel, sonach y einen kleinen

Bruch bedeutet, so hat man

$$N = (x+y)^r = x^r + rx^{r-1}y + r\frac{(r-1)}{2}x^{r-2}y^2 + \ldots \text{ oder}$$

$$N - x^r = y\left(rx^{r-1} + r\frac{r-1}{2}x^{r-2}y\right)$$

nimmt man hier für y den angenäherten Werth $\frac{N-x^r}{rx^{r-1}}$, so erhält man den genaueren Werth

$$y = \frac{N-x^r}{rx^{r-1} + r\frac{(r-1)x^{r-2}(N-x^r)}{2rx^{r-1}}} = \frac{N-x^r}{rx^{r-1} + \frac{r-1}{2x}(N-x^r)},$$

d. i. $y = \frac{2x(N-x^r)}{(r+1)x^r + (r-1)N}$ . . . 25), welches die Lambert'sche Formel ist. In besonderen Fällen erhält man hieraus

für $r=2$, $y = \frac{2x(N-x^2)}{3x^2+N}$; für $r=3$, $y = \frac{x(N-x^3)}{2x^3+N}$

für $r=5$, $y = \frac{x(N-x^5)}{3x^5+2N}$; für $r=7$, $y = \frac{x(N-x^7)}{4x^7+3N}$

u. s. f. wo bloß Primzahlen zu Wurzelexponenten gewählt wurden, weil wenn $r = p.q$ ist, um $\sqrt[r]{N}$ zu finden, die Rechnung einfacher wird, wenn man vorerst $\sqrt[p]{N} = N'$ aufsuchet, und hierauf $\sqrt[q]{N'}$ bestimmet, welche letztere $= \sqrt[r]{N}$ die verlangte Wurzel ist.

29. Um die Genauigkeit zu beurtheilen, welche beide Formeln gewähren, nehme man an, daß bevor eine oder die andere in Anwendung gebracht wird, die Größe x

als der Näherungswerth von $\sqrt[r]{N}$ in n Dezimalen bekannt sei, dieß gibt in 24) die Bedingung, daß

$\sqrt[r]{N}-x<\frac{1}{10^n}$ woraus folgt: $\frac{\sqrt[r]{N}}{x}<1+\frac{1}{x.10^n}$, oder wenn man $\frac{1}{x.10^n}=k$ setzt, $\frac{N}{x^r}<(1+k)^r$: ferner ist $a=N-x^r$, also $\frac{a}{x^r}=\frac{N}{x^r}-1$, oder $\frac{a}{x^r}<(1+k)^r-1$ d. i.

$\frac{a}{x^r}<\binom{r}{1}k+\binom{r}{2}k^2+\binom{r}{3}k^3+\ldots$ diese Binomialkoefficienten enthalten r als Faktor, und da überhaupt $k^r=\frac{1}{x.10^n}k^{r-1}$ ist, so erhält man hieraus

$\frac{a}{rx^r}<\frac{1}{10^n}(\frac{1}{x}+\frac{r-1}{2x}k+\frac{(r-1)(r-2)}{2.3.x}k^2+\ldots)$: soll nun $\frac{a}{rx^r}<\frac{1}{10^n}$ werden, was zur Konvergenz der Reihe sehr beiträgt, so muß der eingeklammerte Ausdruck, oder $((1+k)^r-1)\frac{10^n}{r}$ kleiner als 1 sein, wozu erfordert wird, daß $N>\frac{1}{10^{nr}(\sqrt[r]{(1+k')}-1)^r}$ werde, wo $k'=\frac{r}{10^n}$ Kürze halber gesetzt wurde. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist $\frac{a}{rx^r}<\frac{1}{10^n}$ oder $B=\frac{1}{r}AQ<\frac{1}{10^n}$; und daher $\frac{r-1}{2r}BQ<\frac{1}{10^{2n}}\frac{2r-1}{3r}CQ<\frac{1}{10^{3n}}\ldots$ man erhält sonach unter der angeführten Bedingung, wenn man das zweite

dritte Glied . . . der binomischen Reihe berechnet 2n, 3n . . . richtige Dezimalstellen.

Setzt man in 25) $x+y=z$, so folgt für $r=2$

$$\sqrt{N-z}=\sqrt{N-x}-\frac{2x(N-x^2)}{3x^2+N}, \text{ also}$$

$$\frac{\sqrt{N-z}}{\sqrt{N-x}}=1-\frac{2x(\sqrt{N}+x)}{3x^2+N}=\frac{N-2x\sqrt{N}+x^2}{3x^2+N}$$

$$=\frac{(\sqrt{N}-x)^2}{3x^2+N}, \text{ und hieraus erhält man}$$

$$\sqrt{N-z}=\frac{(\sqrt{N}-x)^3}{3x^2+N}: \text{ ist nun } 3x^2+N>1,$$

oder $N>\frac{1}{4}$, so gibt die Voraussetzung $\sqrt{N}-x<\frac{1}{10^n}$,

$\sqrt{N-z}<\frac{1}{10^{3n}}$: und eben so folgt für $r=3$

$$\sqrt[3]{N-z}=\sqrt[3]{N-x}-\frac{x(N-x^3)}{2x^3+N}, \text{ also}$$

$$\frac{\sqrt[3]{N-z}}{\sqrt[3]{N-x}}=1-\frac{(\sqrt[3]{N^2}+x\sqrt[3]{N}+x^2)}{2x^3+N}=\frac{(\sqrt[3]{N}-x)^2(\sqrt[3]{N}+x)}{2x^3+N}$$

sobald nun $N>1$ ist, so muß $\sqrt[3]{N}+x<N+2x^3$,

daher $\frac{\sqrt[3]{N-z}}{\sqrt[3]{N-x}}<(\sqrt[3]{N}-x)^2$ oder

$\sqrt[3]{N-z}<(\sqrt[3]{N}-x)^3$ sein: woraus wieder folgt

$\sqrt[3]{N-z}<\frac{1}{10^{3n}}$; es gibt daher die Lambert'sche Formel bei

Quadrat und Kubikwurzeln, und wenn die Zahl N gewisse Werthe überschritten hat, auch bei höheren Wurzeln 3n richtige Dezimalstellen, gewährt sonach eine größere Genauigkeit als die binomische Reihe, steht ihr aber hinsichtlich der zur Rechnung so bequemen Form, welche die Ableitung jedes folgenden Gliedes aus dem vorangehenden gestattet, nach. S. 3. VI. 31. *)

V. Der Fermat'sche Lehrsatz.

30. Der Ausdruck 18) zeigt, daß jedes Glied im Polynom $(a+b+c+d+\ldots+k)^m$, mit Ausnahme der Glieder $a^m, b^m, c^m, \ldots k^m$ durch m theilbar sei; ist nun $a=b=c=\ldots=k=1$ und ihre Anzahl k, so geht $a+b+c+\ldots+k$ in k über, und man hat die Gleichung $k^m = k+m\alpha$, wo α eine ganze Zahl bedeutet, dieß gibt für $k(k^{m-1}-1)$ eine Zahl, welche durch m theilbar ist: hieraus folgt, daß so oft m eine Primzahl, und k kein Vielfaches derselben ist, k^{m-1} durch m getheilt 1 zum Reste geben muß, welchen Satz man nach seinem Erfinder den Fermat'schen Satz nennt. Bezeichnet man die gerade Zahl $m-1$ durch $2n$, so ist $k^{m-1}-1 = k^{2n}-1 = (k^n+1)(k^n-1)$, mithin muß die Primzahl m ein Theiler eines der beiden Faktoren $k^n \pm 1$ sein, oder was auf eins hinausläuft, wenn m eine Primzahl >2 und $n=\frac{1}{2}(m-1)$ ist, so muß k^n durch m getheilt 1 oder $k-1$ zum Reste geben.

*) Ist zu lesen: siehe Zeitschrift für Physik und Mathematik. Herausgegeben von A. Baumgartner und A. v. Ettingshausen. Band VI. Seite 31, und so in a. dgl. Fällen.

z. B. $2^3 = 8$ durch 7 getheilt, gibt den Rest 1, $3^3 = 27$ hingegen den Rest 6.

31. Bei der Anwendung dieses eine Primzahl charakterisirenden Satzes waltet die Schwierigkeit ob, wie man ohne weitläufige Rechnungen eine Zahl k auf hohe Potenzen erheben soll, um hienach die Reste der Division derselben durch die Primzahl m zu bestimmen. Sei $k^r = \alpha m + \beta$, wo α irgend eine ganze Zahl, und β den Rest bedeutet, den die Größe k^r durch m getheilt gibt, und eben so sei $k^s = \alpha' m + \beta'$, so erhält man $k^{r+s} = (\alpha\alpha' m + \alpha'\beta + \alpha\beta')m + \beta\beta'$, daher gibt die Größe k^{r+s} das Produkt der Zahlen zum Reste, welche als Reste einzelner Faktoren sich ergeben; man kann sonach bei dieser Untersuchung die Vielfachen von m, wie sich solche nach und nach ergeben, wegwerfen, und nur mit den Resten weiter rechnen, wodurch die Untersuchung sehr erleichtert wird. Z. B. Ist 83 eine Primzahl? Man setze $k = 2$, so findet man $2^8 = 256 = 3.83 + 7$, also gibt 2^{16} den Rest 49, mithin 2^{24} den Rest $343 = 4.83 + 11$, d. i. 2^{24} gibt den Rest 11, mithin $2^{24} \times 2^{16} = 2^{40}$ den Rest $49 \times 11 = 539 = 6.83 + 41$, nämlich 41, und $2^{41} = 2^{40} \times 2$ läßt $41 \times 2 = 82$ zum Reste, folglich ist 83 eine Primzahl.

32. Hierauf gründet sich auch eine Methode die Theiler der Zahlen aufzusuchen: läßt sich nämlich eine Zahl N durch Hinzufügung von ± 1, oder aber durch die Multiplikation mit einem Faktor a auf die Form k^n bringen; so hat man im ersten Falle $N = k^n \pm 1$, im andern Falle $a.N = k^n \pm 1$ Ist nun $N = k^n + 1$, und $m = 2n + 1$ eine Primzahl, so gibt k^n durch m ge-

theilt den Rest ± 1 (30), wenn aber $2n+1$ keine Primzahl ist, so findet man eine solche unter den Zahlen der Form $2nx+1$ für welche k^{nx} oder wenn man n statt nx setzt, k^n durch $2nx+1$ getheilt den Rest ± 1 läßt; daher sind die Theiler von k^n+1 entweder in der Form $2nx+1$ enthalten, oder sie sind Theiler einer Zahl k^r+1, wo r ein Faktor von n ist: dasselbe gilt auch von $N=k^n-1$, wenn n eine ungerade Zahl vorstellt. Wenn aber $n=2r$ eine gerade Zahl ist, so hat man $k^n=(k^r+1)(k^r-1)$, und es erscheinen die Faktoren von k^n, unter den Faktoren von k^r+1, und k^r-1, sie sind also entweder in der Form $2rx+1$, nämlich $nx+1$ enthalten, oder wenn r wieder eine gerade Zahl bedeutet, aus demselben Grunde in der Form $\frac{1}{2}nx+1$, $\frac{1}{4}nx+1$ u. s. f. einbegriffen. Die Tafel der höheren Potenzen von 2, 3 und 5 kann hiebei gute Dienste leisten. Sei

$N=549755813889=2^{39}+1$: man hat $39=3.13$, und

$$\binom{39}{2+1}:\binom{13}{2+1}=2^{26}-2^{13}+1=67100673=3.22366891$$

Die Faktoren der Zahl 22366891 suche man nun unter den Primzahlen von der Form $78x+1$, und da keine derselben ein Theiler davon ist, so folgt $549755813889=3^2.2731.22366891$.

Sei ferner $N=1765184603$: multiplicirt man diese Zahl mit $2^5.5=160$, so erhält man

$$160\,N=28242956480=3^{24}-1$$

da hier $n=24=2^3.3$ ist, so untersuche man zuerst die Formen $6x+1$, $12x+1$ als Theiler: man findet wirklich, daß $1765184603=7.13.19397633$. Nun nehme man die Theiler von der Form $24x+1$, oder die Primzahlen 73, 97 ... vor, und es ergibt sich, daß 73

ein Theiler ist, man hat sonach

$$1765184603 = 7.13.41.73.6481$$

n	2^n	n	n	3^n	5^n	n
1	2	1125899906842624	50	1	3	298023223876953125	25
2	4	562949953421312	49	2	9	59604644775390625	24
3	8	281474976710656	48	3	27	11920928955078125	23
4	16	140737488355328	47	4	81	2384185791015625	22
5	32	70368744177664	46	5	243	476837158203125	21
6	64	35184372088832	45	6	729	95367431640625	20
7	128	17592186044416	44	7	2187	19073486328125	19
8	256	8796093022208	43	8	6561	3814697265625	18
9	512	4398046511104	42	9	19683	762939453125	17
10	1024	2199023255552	41	10	59049	152587890625	16
11	2048	1099511627776	40	11	177147	30517578125	15
12	4096	549755813888	39	12	531441	6103515625	14
13	8192	274877906944	38	13	1594323	1220703125	13
14	16384	137438953472	37	14	4782969	244140625	12
15	32768	68719476736	36	15	14348907	48828125	11
16	65536	34359738368	35	16	43046721	9765625	10
17	131072	17179869184	34	17	129140163	1953125	9
18	262144	8589934592	33	18	387420489	390625	8
19	524288	4294967296	32	19	1162261467	78125	7
20	1048576	2147483648	31	20	3486784401	15625	6
21	2097152	1073741824	30	21	10460353203	3125	5
22	4194303	536870912	29	22	31381059609	625	4
23	8388608	268435456	28	23	94143178827	125	3
24	16777216	134217728	27	24	282429536431	[illegible]	2
25	33554432	67108864	26	25	847288609443	[illegible]	1

Vergleiche Anmerk. b.

VI. Versetzungen und Verbindungen mit Wiederholungen.

33. Wenn unter den gegebenen Elementen zwei oder mehrere gleiche vorkommen, so heißen die aus ihnen gebildeten Versetzungen und Verbindungen beziehungsweise Versetzungen und Verbindungen mit Wiederholungen. Aus den gegebenen Elementen a, b, b, b, c gibt es je 5 folgende gut geordnete Ver-

setzungen: abbbc abbcb abcbb acbbb babbc babcb bacbb bbabc bbacb bbbac bbbca bbcab bbcba bcabb bcbab bcbba cabbb cbabb cbbab cbbba, der Verbindungen je 4 derselben Elemente: abbb abbc bbbc.

34. Wenn unter den gegebenen m Elementen eine Anzahl a gleiche Elemente vorkommen, so betrachte man zuerst die gleichen Elemente als verschieden, und theile alle Versetzungen der m Elemente in Gruppen so ab, daß die Zusammenstellungen jeder einzelnen Gruppe sich bloß durch die gegenseitige Stellung der a Elemente von einander unterscheiden, während die anderen Elemente genau dieselben Plätze einnehmen. Jede Gruppe erhält nun so viele Glieder als jene a Elemente Versetzungen zulassen, ihre Anzahl ist nämlich a! (3): und daher die Anzahl der Gruppen $\frac{m!}{a!}$. Läßt man die a Elemente wieder einander gleich sein, so gelten alle Glieder einer Gruppe für eine Versetzung, und man hat dann so viele Versetzungen, als ehedem Gruppen waren; mithin ist die Anzahl der Versetzungen von m Elementen, worunter a gleiche erscheinen $\frac{m!}{a!}$. Bezeichnet man diese Zahl mit n, und es befinden sich, außer den a gleichen noch b andere gleiche Elemente, so ist aus einem ähnlichen Grunde die Anzahl aller Versetzungen nur noch

$$\frac{n}{b!} = \frac{m!}{a!\,b!}$$

und allgemein, wenn unter den m gegebenen Elementen a gleiche der einen Art, b gleiche der zweiten Art, c gleiche der dritten Art u. s. f. vorkommen, wird die Anzahl aller möglichen Versetzungen sein

$$= \frac{m}{a!\,b!\,c!\,\ldots}$$

35. Frägt man aber nach der Menge der Verbindungen mit Wiederholungen, welche von m Elementen je k entstehen können, so sei diese $= C_k$, und die Anzahl solcher Verbindungen je $k-1$ derselben sei $= C_{k-1}$: denkt man sich die letzteren gebildet, und verbindet jede derselben mit einem der m Elemente, so erhält man eine Gruppe von Verbindungen je k Elemente, ihre Anzahl ist $m \cdot C_{k-1}$: allein man bemerkt leicht, daß unter diesen Verbindungen diejenigen, wo ein Element sich kmahl wiederholt nur einmahl erscheinen, diejenigen wo ein Element sich $(k-1)$mahl, $(k-2)$mahl . . . wiederholt zwei, dreimahl, u. s. f. endlich diejenigen Verbindungen, wo kein Element sich wiederholt, kmahl vorkommen: hat man z. B. aus den Elementen a, b, c, d die Verbindungen je zwei, aa ab ac ad bb bc bd cc cd dd, und vereinigt diese mit den Elementen a, b, c, d auf's neue, so können die Verbindungen aaa, bbb, . . . nur einmahl erscheinen, die Verbindungen aab, aac, abb . . . entstehen einmahl aus aa, ab und b aus aa und c, ein zweites Mahl aus ab, ac, bb und a, u. s. f., endlich kommen die Verbindungen abc, abd, . . . auf dreifache Weise zum Vorschein, nämlich aus ab und c, d, ferner aus ac, ad und b, zuletzt aus bc, bd und a; sollen daher sämmtliche Verbindungen je k gleich vielmahl erscheinen, so muß man noch jede der Verbindungen je $k-1$, mit allen in ihr vorkommenden Elementen zu Verbindungen je k Elemente vereinigen, auf diese Art entstehen aus der Verbindung aa je zwei, die neuen Verbindungen je drei aaa, aaa, eben so aus ab, die Verbindungen aab, abb, und man erhält so eine zweite Gruppe von Verbindungen, welche die gleichnahmigen Verbindungen der ersten Gruppe zur Zahl k ergänzt,

ihre Anzahl ist $(k-1)\,C_{k-1}$, und da nun in beiden Gruppen sämmtliche Verbindungen genau kmahl anzutreffen sind, so ist

$$C_k = \frac{m+k-1}{k} \cdot C_{k-1} \quad \ldots 26)$$

Da aber $C_1 = m$ ist, so erhält man

$$C_2 = \frac{m+1}{2} C_1 = \frac{m(m+1)}{2}; C_3 = \frac{m+2}{3} C_2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3}$$

und allgemein, ist

$$C_{k-1} = \frac{m(m+1)(m+2) \ldots (m+k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)};$$ so folgt

wegen 26)

$$C_k = \frac{m(m+1)(m+2) \ldots (m+k-2)(m+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1) \cdot k} \quad \ldots 27)$$

den Zähler dieses Ausdrucks werden wir Kürze halber mit $m \smile (m+k-1)$ bezeichnen, hiedurch wird

$$C_k = \frac{m \smile (m+k-1)}{k!} \quad \ldots 28)$$

36. Das allgemeine Glied des Polynoms

$(a+b+c+ \ldots + k)^m$, ist nach 18) das Produkt der Faktoren $a^{m-n}, b^{n-p}, c^{p-q}, \ldots k^t$, deren Exponenten jede ganze Zahl zwischen Null und m bedeuten können, wenn nur ihre Summe stets m beträgt (24); es sind daher die Glieder eines jeden Polynoms Verbindungen mit Wiederholungen der k Größen a, b, c ... k je m, mithin beläuft sich nach 28), wenn man daselbst k mit m vertauscht, ihre Anzahl auf

$$\frac{k \smile (k+m-1)}{m!}.$$

Z. B. das Trinom $(a+b+c)^{10}$ enthält

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 9 \cdot 10} = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66 \text{ Glieder.}$$

37. Ist eine Zahl $N = a^m b^n c^p \ldots$, wo a, b, c ... Primzahlen bedeuten, so hat jeder Theiler derselben die Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wenn $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Zahlen m, n, p ... nie übersteigen; es sind sonach alle möglichen Theiler der Zahl N die Glieder des Produktes

$(1+a+a^2 \ldots+a^m)(1+b \ldots+b^n)(1+c+c^2 \ldots+c^p) \ldots$

d. i. sämmtliche Verbindungen mit Wiederholungen, die sich nach den Zeigern 1, 2, 3 ... bis $m+n+p+\ldots$ aus den Elementen a, b, c ... bilden lassen, wenn a höchstens mmahl, b höchstens nmahl, c höchstens pmahl ... in einer Zusammenstellung erscheinen darf: ihre Anzahl ist offenbar, wenn man unter den Theilern die Einheit und die Zahl selbst ausschließt

$$k = (1+m)(1+n)(1+p) \ldots - 2, \ldots 29)$$

Z. B. $360 = 2^3 . 3^2 . 5$: die einfachen Theiler sind also 2, 3, 5 deren Verbindungen je zwei

$2.2 = 4$, $2.3 = 6$, $2.5 = 10$, $3.3 = 9$, und $3.5 = 15$;

je drei 8 12 20 18 30 45; je vier 24 40 36 60 90 und je fünf 72 120 180. Die Anzahl sämmtlicher Theiler ist also $4 . 3 . 2 - 2 = 22$. Man vergleiche:

Die combinatorische Analysis, von Andr. v. Ettingshausen. Wien 1826.

VII. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

38. Wenn unter allen gleich möglichen Fällen, die Zahl der einem Ereignisse günstigen, die Zahl der ungünstigen Fälle übertrifft, so sagt man: das Ereigniß sei wahrscheinlich, im Gegentheile, unwahrscheinlich: die Verhältnißzahl der günstigen Fälle

zu allen möglichen Fällen eines und desselben Ereignisses heißt dessen mathematische Wahrscheinlichkeit. Bezeichnet man die günstigen Fälle mit m, die ungünstigen mit n, so ist die Wahrscheinlichkeit w

$$w = \frac{m}{m+n} \quad \ldots 30)$$

Ist hier $n = 0$, oder finden die ungünstigen Fälle gar nicht Statt; so folgt $w = \frac{m}{m} = 1$, die Einheit ist also der numerische Werth der Gewißheit.

39. Sind aber die einzelnen Fälle in verschiedenem Grade möglich, und läßt sich diese Verschiedenheit durch Zahlen bestimmen, so findet man die Wahrscheinlichkeit einzelner Fälle, wenn man die zugehörige Zahl durch die Summe sämmtlicher Zahlen dividirt. Wenn also in einem Gefäße m schwarze Kugeln, n weiße, p rothe, q gelbe, r grüne vorhanden sind, und $m+n+p+q+r = s$ gesetzt wird, so ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen gleich $\frac{n}{s}$, eine grüne Kugel zu ziehen $= \frac{r}{s}$ u. s. f. Oder ein Lotterierad enthalte m Numern, unter denen n gezogen werden: ein Spieler besetzt m' Numern, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit daß er n' Numern trifft? Die Gesammtzahl der möglichen Fälle ist hier $\binom{m}{n}$, dieß ist der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit: der Zähler ergibt sich aus der Menge der Verbindungen zwischen $\binom{m-m'}{n-n'}$ und $\binom{m'}{n'}$ Größen je n derselben, welche nach 10) . . . $\binom{m-m'}{n-n'}\binom{m'}{n'}$ beträgt. Z. B. Ist $m = 90$, $m = 5$, $m' = 20$ so

erhält man, wenn man nach einander n' gleich 1, 2, 3, 4, 5 sein läßt, die Wahrscheinlichkeit eines einzigen Treffers, einer Ambe, Terne, Quaterne, Quinterne

$$20\binom{70}{4}:\binom{90}{5};\ \frac{20.19}{1.2}\binom{70}{3}:\binom{90}{5};$$

$$\frac{20.19.18}{1.2.3}\binom{70}{2}:\binom{90}{5};\ 70\binom{20}{4}:\binom{90}{5};\ \binom{20}{5}:\binom{90}{5}$$

oder 0.4172; 0.2367; 0.0626; 0.0077; 0.0003.

Die Summe dieser Zahlen oder 0.7245 gibt die Wahrscheinlichkeit daß der Spieler wenigstens eine Numer treffen wird: und eben so gibt die Summe der 4 letzten, der 3 letzten Zahlen, nämlich: 0.3073, 0.0706 beziehungsweise die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht weniger als 2, 3 Numern trifft.

Eine ausführlichere Auseinandersetzung dieses Gegenstandes findet man, in Lacroix, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. A. d. Franz. von C. S. Unger. Erfurt 1818.

40. Zwei Ereignisse A, B die entweder gar nicht, oder einzeln, und auch mit einander eintreffen können, werden durch p, p' Ursachen begünstigt, durch q, q' Ursachen aber verhindert, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jedes derselben einzeln, und beide zugleich Statt haben werden? Da A, sämmtliche Ursachen einander gleichgesetzt, in p Fällen erscheint, und B in q' Fällen ausbleibt, so trifft A allein ein, in p q' Fällen: und aus gleichem Grunde erfolgt B allein in p'q Fällen, ferner beide A und B zugleich in p p' Fällen, endlich trifft keines derselben ein in qq^1 Fällen; es ist sonach die Zahl aller möglichen Fälle

$= pq' + p'q + pp' + qq' = (p+q)(p'+q')$. Setzt

man nun die einfachen Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens und Nichteintreffens von A und B nämlich:

$$\frac{p}{p+q} = e, \frac{p'}{p'+q'} = e', \frac{q}{p+q} = f, \frac{q'}{p'+q'} = f',$$

so erhält man die gesuchten zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten, daß A allein eintrifft $= ef'$, daß B allein Statt hat $= e'f$, daß beide Ereignisse erfolgen $= ee'$, daß beide ausbleiben $= ff'$. Z. B. mit den bekannten 2 Würfeln, wünscht man in einem Wurfe 1 und 4 zu treffen, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann dieses erfolgen? Da man mit dem einen Würfel, 1 oder 4 werfen muß, so gibt es 2 günstige Fälle, mithin $e = \frac{2}{6}$, während für den andern Würfel nur ein günstiger Fall Statt hat, also $e' = \frac{1}{6}$ ist, hieraus folgt $ee' = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; ferner hat man $f = 1 - e = \frac{4}{6}$, $f' = \frac{5}{6}$, mithin $ff' = \frac{20}{36} = \frac{10}{18}$; man kann sonach 10 gegen 1 wetten, daß der Wurf mißlingt.

41. Bei der Zusammensetzung der Wahrscheinlichkeiten, werden ihre Werthe vermindert, weil überhaupt das Produkt mehrerer echten Brüche desto kleiner wird, je größer die Anzahl seiner Faktoren ist. Daher wenn ein Augenzeuge, dessen Wahrhaftigkeit bekannt ist, uns unmittelbar das in seiner Gegenwart Statt gefundene Ereigniß erzählt, die Wahrscheinlichkeit desselben weit größer ist, als wenn wir es durch Ueberlieferung mehrerer gleich glaubwürdiger Personen mittelbar vernommen haben. Schlägt man nämlich, die Wahrscheinlichkeit, daß der Augenzeuge die Wahrheit gesprochen, und sich bei der Wahrnehmung durch seine Sinne nicht hat anführen lassen, auf $\frac{9}{10}$ an; so wird die Wahr-

scheinlichkeit des Ereignisses, wenn wir es durch eine zweite Person von gleicher Glaubwürdigkeit die es unmittelbar von dem Augenzeugen weiß, vernommen haben, nur noch $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{100}$ oder etwa $\frac{8}{10}$: wenn hingegen die Erzählung desselben sich durch 20 gleich glaubwürdige Personen fortgepflanzt hat, und wir es erst von der 20ten erfahren, so wird die Wahrscheinlichkeit desselben nur noch $(\frac{9}{10})^{20} < \frac{1}{8}$, oder man könnte in diesem Falle 7 gegen 1 wetten, daß die letzte Erzählung falsch sei. Auf schriftliche Ueberlieferungen, kann man natürlich diese Schlußweise nicht anwenden, weil sich die Reinheit der ersten Quelle durch buchstäbliche Abschriften, Jahrhunderte hindurch behaupten kann; worauf sich alle historische Wahrheit gründet.

42. Zwei Ereignisse A, B, die entweder einzeln, oder mitsammen erfolgen müssen, werden beziehungsweise in p, q Fällen begünstiget, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens, wenn dieselben Fälle sich einmahl oder mehrere Mahle wiederholen? Bei einer Wiederholung trifft A allein in pp Fällen ein, B allein in qq Fällen, A mit B in pq Fällen, und eben so oft B mit A: daher die Zahl sämmtlicher Fälle $= p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2$, und wenn man die einfachen Wahrscheinlichkeiten für A und B beziehungsweise mit e und f bezeichnet, so erhält man die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit daß A zweimahl erscheint $= e^2$, daß früher A und dann B kommt $= ef$, daß früher B, und dann A Statt hat $= ef$, daß endlich B zweimahl erscheint $= f^2$. Eben so erhält man bei zwei Wiederholungen derselben Ereignisse, die Wahrscheinlichkeit, daß A dreimahl erfolgt $= e^3$: daß zuerst A zweimahl nach

einander und B einmahl, oder daß zuerst A, dann B, endlich wieder A, oder daß zuerst B einmahl, dann A zweimahl eintrifft $= e^2f$: ferner, daß A einmahl, dann B zweimahl nach einander, oder daß zuerst B, hierauf A, dann wieder B, oder daß zuerst B zweimahl und dann A Statt hat, $= ef^2$: endlich daß B dreimahl eintrifft $= f^3$; nimmt man aber auf die Ordnung, in welcher beide Ereigniſſe auf einander folgen, keine Rückſicht, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß A zweimahl und B einmahl eintrifft $= 3e^2f$, daß hingegen A einmahl und B zweimahl erfolgt $= 3ef^2$.

43. Allgemein, wenn die Fälle p, q ſich nmahl wiederholen, und man von der Ordnung, in welcher die Ereigniſſe A, B auf einander folgen, abſieht; ſo erſcheint A allein und nmahl hinter einander in p^n Fällen, ferner A $(n-1)$mahl und B einmahl in $np^{n-1}q$ Fällen, A $(n-2)$mahl und B zweimahl in $\binom{n}{2}p^{n-2}q^2$ Fällen, u. ſ. f. A $(n-r)$mahl und B rmahl in $\binom{n}{r}p^{n-r}q^r$ Fällen, endlich B nmahl und allein in q^n Fällen; es iſt ſonach die Anzahl aller möglichen Fälle

$$= p^n + np^{n-1}q + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 + \ldots + \binom{n}{r}p^{n-r}q^r \ldots + q^n$$

$= (p+q)^n$; daher iſt bei der angegebenen Bedeutung von e und f, die Wahrſcheinlichkeit, daß A bei n Wiederholungen immer zum Vorſchein kommt $= e^n$, daß A $(n-1)$mahl und B einmahl eintrifft $= ne^{n-1}f$, daß A $(n-2)$mahl und B 2mahl Statt hat $= \binom{n}{2}e^{n-2}f^2$,

u. s. f. also allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, daß A $(n-r)$mahl, und B $r$mahl erfolgt,

$$w=\binom{n}{r}e^{n-r}f^r \quad \ldots 31)$$

44. Soll aber A in n Wiederholungen, nicht weniger als $(n-r)$mahl eintreffen, so leisten dieser Bedingung sämmtliche Glieder des Binoms $(e+f)^n$, von e^n an bis auf das Glied $\binom{n}{r}e^{n-r}f^r$ Genüge, daher die zugehörige Wahrscheinlichkeit die Summe genannter Glieder sein wird. Um z. B. mit einem Würfel in 4 Würfen 2 Sechser zu treffen, hat man $e=\frac{1}{6}$, $f=\frac{5}{6}$, $n=4$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$=e^4+4e^3f+6e^2f^2=\frac{1+20+150}{1296}=\frac{171}{1296},$$ mithin zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$.

Umgekehrt kann man, bei gegebener Wahrscheinlichkeit g eines Ereignisses A nach der Anzahl der erforderlichen Wiederholungen fragen: alsdann ist

$$e^n+ne^{n-1}f+\ldots+\binom{n}{r}e^{n-r}f^r+\ldots+nef^{n-1}=g$$

aus welcher Gleichung zwar n nicht immer leicht gefunden werden kann, allein man hat zugleich $f^n=1-g$, woraus sich $n=\frac{\log.(1-g)}{\log f}$ ergibt. Z. B. wie viel Würfe hat man mit 2 Würfeln zu machen, daß es gleich wahrscheinlich wird, zwei Sechser zu treffen oder nicht? Hier ist $g=\frac{1}{2}$, $e=\frac{1}{36}$, $f=\frac{35}{36}$, mithin $n=24{,}6$; es ist also in 25 Würfen wahrscheinlicher 2 Sechser zu treffen, als das Gegentheil.

45. Die Formel 31) gibt, wenn man $r-1$ und $r+1$ statt r setzt, und die Ergebnisse mit w' und w'' bezeichnet

$w' = \binom{n}{r-1} e^{n-r+1} f^{r-1}$, $w'' = \binom{n}{r+1} e^{n-r-1} f^{r+1}$:

sei $w > w'$, und auch $w > w''$, dieß gibt $\frac{w}{w'} > 1, \frac{w}{w''} > 1$;

es ist aber wegen 7)

$\frac{w}{w'} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{f}{e}$, und wenn man hier $r+1$ statt r setzt

$\frac{w''}{w} = \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{f}{e}$, mithin $\frac{w}{w''} = \frac{r+1}{n-r} \cdot \frac{e}{f}$

Hieraus folgt $\frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{f}{e} > 1$, und $\frac{r+1}{n-r} \cdot \frac{e}{f} > 1$:

sucht man nun denjenigen Werth von r, der diesen Bedingungen Genüge leistet, so findet man

$r < \frac{nf+f}{e+f}$, und zugleich $r > \frac{nf-e}{e+f}$.

Da beide Werthe bloß nun 1 von einander unterschieden sind, so setze man $n = k(e+f)$, und man erhält

$r < kf + \frac{f}{e+f}$, und zugleich $r > kf - \frac{e}{e+f}$ und

weil r eine ganze Zahl bedeuten muß, so ist offenbar $r = kf$, wodurch $n - r = k(e+f) - kf = ke$ wird, derjenige Werth, für welchen w größer als w' und w'' ist: bezeichnet man ferner das Glied vor w' mit v', und das nach w'' folgende mit v'', so wird $\frac{w'}{v'} > \frac{w}{w'}$,

weil der Faktor $\frac{n-r+1}{r}$ desto größer sein muß, je mehr r abnimmt, d. i. je näher ein Glied beim Anfange der Reihe für $(e+f)^n$ steht, und umgekehrt wird $\frac{v''}{w''} < \frac{w''}{w}$;

es ist sonach $w > w' > v' \ldots$, und zugleich

$w > w'' > v'' \ldots$, mithin ist bei n Wiederholungen der einfachen Ereignisse A und B,

diejenige Wahrscheinlichkeit wam größten, bei welcher $\frac{e}{n-r} = \frac{f}{r}$ ist. Hat man $e = f$, so wird $n - r = r$, oder $r = \frac{1}{2} n$, wenn n eine gerade Zahl bedeutet, sonst aber muß $r = \frac{1}{2}(n \pm 1)$ sein; übereinstimmend mit (18).

46. Allgemein, wenn eine Anzahl Ereignisse A, B, C, ... K, die einzeln oder mitsammen erfolgen müssen, in a, b, c ... k Fällen beziehungsweise begünstigt werden, und die Wiederholung derselben nmahl Statt hat, so geben die einzelnen Glieder des Polynoms

$(a + b + c + \ldots + k)^m = s$, die Menge der Fälle, wo die einzelnen Ereignisse nach einer bestimmten Anzahl eintreffen, und da die Anzahl aller Fälle $= s$ ist, so erhält man hieraus die Wahrscheinlichkeit, welche irgend einem Gliede des Polynoms zugehört, wenn man dasselbe durch s dividirt. Bezeichnet man der Formel 17) gemäß die Glieder des Polynoms

$$\frac{n!\, a^p b^q c^r \ldots k^t}{p!\, q!\, r! \ldots t!} \text{ und } \frac{n!\, a^{p+k} b^{q+l} c^x \ldots k^t}{(p+k)!\, (q+l)!\, r! \ldots t!}$$

beziehungsweise mit N und M, so wird N den größten Werth haben, wenn $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \ldots = \frac{k}{t}$ ist.

Denn man hat immer $p + q + r + \ldots + t = n$; sind also die Exponenten einiger Buchstaben in M größer, als die zugehörigen Exponenten in N, so müssen die übrigen Exponenten in jenem um so viel kleiner werden, als in diesem Gliede: es erhält sonach M neben den Größen, die es etwa mit N gemeinschaftlich hat, noch eine Anzahl μ von Faktoren von der Form $\frac{a}{p+k'} \frac{b}{q+l} \ldots$, deren jeder kleiner als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} \ldots$ ist, hingegen

begreift die Größe N wegen jenen Gliedern, deren Exponenten in M kleiner sind als in N eine gleiche Anzahl μ von Faktoren von der Form $\frac{d}{s-n}, \frac{e}{t-o}$... sämmtlich größer als $\frac{d}{s} = \frac{e}{t} = \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$ . . . Daher ist das Verhältniß von N : M = dem Verhältnisse der Produkte von einer gleichen Anzahl Faktoren, die im Vorsatze, durchgängig größer sind, als im Nachsatze des Verhältnisses, oder es ist stets N > M.

47. Zuweilen sind die Ursachen eines Ereignisses unbekannt, oder sie durchkreuzen sich auf eine so mannichfache Weise, daß es unmöglich wird sie zu erheben, und mathematisch zu bestimmen: dann nimmt man gewöhnlich seine Zuflucht zur Erfahrung, indem man beobachtet, ob das Eintreffen des Ereignisses nicht einer periodischen Wiederkehr unterliegt, und man setzt die Zahl der so beobachteten Wiederkehrungen desselben, an die Stelle der verborgenen Ursachen, woraus man so fort dessen Wahrscheinlichkeit bestimmen kann. Auf diese Weise hat man ausgemittelt: daß in einem bestimmten Lande, die Zahl der geschlossenen Ehen, zur Zahl der Geburten, und zur Bevölkerung sich nahe verhält, wie 3 : 14 : 396; daß auf je 16 männliche Geburten 15 weibliche kommen, *) dagegen auf 24 männliche Sterbfälle

*) Vom Jahre 1817 bis 1826 wurden in Frankreich gebohren, 4981566 männlichen, und 4674569 weiblichen Geschlechts, ihr Verhältniß ist nahe = 16 : 15. In den südlichen Departementen allein wurden in demselben Zeitraume gebohren, 1400535 männl. und 1313248 weibl., deren Verhältniß ebenfalls nahe wie 16 : 15 ist, woraus erhellet, daß der Ueberschuß der männlichen Geburten vom Klima nicht

23 weibliche, und auf 33 männliche Bewohner 29 weibliche gerechnet werden können: daß die jährliche Anzahl der Geburten, der Sterbfälle und der geschlossenen Ehen zu einander sich verhält, wie 71896 : 67700 : 15345, und die jährlichen Geburten den 28ten, die Sterbfälle den 30ten, und die Ehen den 132ten Theil der Bevölkerung betragen: daß die Hälfte der ganzen Bevölkerung unter 25 Jahren sei, und die mittlere Dauer des Lebens, 28,5 Jahre nicht übersteigt.

48. Vergleicht man die Sterbelisten mehrerer Orte unter einander, so ergibt sich eine merkwürdige Beziehung zwischen den in jedem Alter erfolgenden Sterbefällen. Wenn nämlich an einem Orte 1000 Kinder gebohren werden, so sterben hievon im Durchschnitte, 232 im 1ten Jahre, 96 im zweiten Jahre, 47 im dritten Jahre u. s. f. wie folgende von Düvillard entworfene Tafel zeigt:

A. L.	log.	B.	A. L.	log.	B.	A. L.	log.	B.
1 768	88509	969274	11 647	73790	762716	21 496	69576	580826
2 672	82726	944254	12 543	73450	743776	22 490	69043	563676
3 625	79565	921716	13 538	73099	724987	23 484	68492	546739
4 599	77722	900450	14 534	72731	706353	24 478	67923	530019
5 583	76578	87990.	15 529	72343	687880	25 471	67336	513519
6 573	75817	859807	16 524	71935	669575	26 465	66732	497244
7 566	75269	84 010	17 519	71505	651446	27 458	66113	481197
8 560	74838	820434	18 514	71054	633500	28 452	65479	465380
9 555	74467	801039	19 508	70582	615744	29 445	64829	449795
s =	22763	.	s =	17457		s =	12715	
10 551	74125	781803	20 502	70089	598184	30 438	64165	434443

merklich abhängt. Hingegen gab es in demselben Zeitraume der Todesfälle 3897755 männl. und 3826523 weibl. Geschl. deren Verhältniß fast 55 : 54 beträgt. S. Annuaire pour l'an 1829.

A.	L.	log.	B.	A.	L.	log.	B.	A.	L.	log.	B.
31	431	63488	419327	56	249	39582	120940	80	35	54039	5547
32	425	62796	404447	57	240	38060	112440	81	29	46069	4442
33	418	62091	389805	58	231	36453	104240	82	24	37438	3528
34	411	61372	375400	59	223	34753	96347	83	19	28117	2784
35	404	60639	361233	60	214	32953	88765	84	15	18113	2188
36	397	59893	247308	s	=	2660		85	12	07504	1718
37	390	59131	333622	61	204	31044	81499	86	9	96492	1351
38	383	58354	320175	62	195	29015	74556	87	7	85522	1066
39	376	57561	306970	63	186	26858	67939	88	6	76358	843
s	=	8541		64	176	24560	61652	89	5	67080	663
40	369	56750	294006	65	166	22109	55700	s	=	17	
41	362	55921	281284	66	157	19493	50085	90	4	58320	515
42	355	55072	268806	67	147	16697	44808	91	3	49038	394
43	348	54201	256573	68	137	13704	39872	92	3	39199	298
44	341	53305	244586	69	127	10499	35275	93	2	28735	221
45	334	52384	232847	s	=	951		94	1	17580	161
46	327	51434	221358	70	118	07061	31016	95	1	05690	116
47	320	50452	210121	71	108	03371	27092	96	1	92942	81
48	312	49436	199141	72	99	99404	23499				
49	305	48382	188418	73	89	95136	20230				
s	=	5567		74	80	90538	17278				
50	297	47286	177958	75	72	85579	14632				
51	289	46144	167764	76	63	80225	12283				
52	282	44952	157840	77	56	74438	10215				
53	274	43705	148191	78	48	68176	8415				
54	265	42398	138821	79	41	61392	6865				
55	257	41026	129736	s	=	177					

Bezeichnet man die Zahl der in irgend einem Alter von n Jahren, und in den darauf folgenden Jahren Lebenden, nämlich die Zahlen der zweiten Spalte mit $L, L_1, L_2, L_3, \ldots$; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person von n Jahren 1, 2, 3 ... Jahre überlebt, beziehungsweise $\frac{L_1}{L}, \frac{L_2}{L}, \frac{L_3}{L} \ldots$. Bedeutet m das Alter, dessen in der zweiten Spalte nebenstehende Zahl $\frac{1}{2}$ L beträgt, so ist es gleich wahrscheinlich, daß eine Person von n Jahren, noch m — n Jahre lebt, als das Gegentheil. Die mittlere Lebensdauer aber dieses Alters ergibt sich

$$\mu = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + 1}{L} = \frac{s}{L}, \quad \ldots 32)$$

Um dieselbe mittelst der Tafel leichter zu finden, habe ich die Summen der Lebenden = s vom höchsten Alter an, und mit Rücksicht auf die Dezimalstellen von L vollständig bestimmt, und je 10 Jahre beigefügt. Z. B. Die mittlere Lebensdauer eines 19jährigen Mannes ergibt sich sofort $= \frac{17457}{508} = 34{,}3$ Jahre, eines 17jährigen aber $= \frac{17457 + 508 + 514}{519} = 35{,}6$ Jahre. Die Zahlen in der dritten Spalte der Tafel sind Logarithmen der genauer ausgedrückten Werthe von L: ihr Gebrauch ist vielfältig. Die Zahlen der mit B. bezeichneten Spalte geben an, wie viele bei einer Million Einwohner irgend ein Alter überstiegen haben. Man findet so, daß bei dieser Bevölkerung 434443 Menschen das 30te, und 88765 das 60te Lebensjahr zurückgelegt haben, u. s. f.

VIII. Zinseszinsen, Lebensrenten.

49. Wird ein Kapital k zu p Prozent angelegt, so trägt es nach einem Jahre an Interessen $\frac{kp}{100}$, und es erwächst dasselbe nach einem Jahre auf die Summe $k + \frac{kp}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)$; setzt man Kürze halber $1 + \frac{p}{100} = i$, da dann i die Größe bedeutet, zu welcher die Einheit der Währung, in welcher das Kapital berechnet wird, sammt den Interessen nach einem Jahre anwächst, so hat man das Kapital k sammt den Interessen am Ende des ersten Jahres $= ki$, und dieses Ka-

pital wächst am Ende des zweiten Jahres an, auf $ki.i = ki^2$, am Ende des dritten Jahres auf $ki^2.i = ki^3$; es bilden also die Kapitale sammt den am Ende eines jeden Jahres zugehörigen Interessen eine geometrische Reihe, deren erstes Glied ki, und der Quotient i ist. Man nennt diese Art das Kapital sammt den anwachsenden Interessen zu berechnen, die doppelte Zinsrechnung (Zinseszinsen), zum Unterschiede von der einfachen Zinsrechnung, wenn nämlich die jährlichen Interessen $\frac{kp}{100} = k(i-1)$ nicht weiter verzinst werden, da dann das Kapital sammt den Interessen nach n Jahren auf die Summe $k[1+n(i-1)] = s$ . . . 33) anwächst.

50. Die Summe einer geometrischen Reihe mit dem Anfangsgliede a, dem Quotienten q, und der Gliederzahl n, ist bekanntlich

$$\frac{a(q^n-1)}{q-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots aq^{n-1}, \ldots 34$$

und diese Formel auf die Bestimmung des Endkapitals K angewandt, auf welches ein Kapital k sammt Zinseszinsen nach n Jahren anwächst, gibt

$$K = ki^n \ldots 35)$$

Hieraus ergibt sich sofort die Auflösung folgender Aufgaben:

Wie viele Jahre muß ein Kapital k zu p Prozent angelegt stehen, daß es mmahl so groß wird, als es anfangs war? Man hat $ki^n = mk$, woraus

$$n = \frac{\log. m}{\log. i}, \text{ folgt } \ldots 36)$$

Wenn das Kapital k nach n Jahren auf die Summe K anwachsen soll, wie groß muß der Zinsfuß sein? Da $K = ki^n$ ist, so erhält man zuerst

$$\log. i = \frac{1}{n}(\log. K - \log. k), \text{ und hieraus } p = 100(i-1) \ldots 37)$$

Ein Kapital wird, bei gegebenem Zinsfusse p, nach n Jahren = K, wie groß ist es jetzt? die sogenannte Diskontorechnung: die Gleichung 35) gibt

$$k = \frac{K}{i^n} \ldots 38)$$

51. Nach den österreichischen Gesetzen kann kein Gläubiger auf eine giltige Weise beim Schuldner Zinseszinsen sich bedingen, obschon es ihm unbenommen bleibt, die terminweise einlaufenden einfachen Zinsen als ein neues Kapital auf Interessen anzulegen. In einem solchen Falle erhält der Gläubiger für jede ganze Anzahl Zahlungstermine zwar dieselbe Summe, welche die Formel 35) gibt, wenn er Sorge trägt, daß die terminweise entfallenden Bruchtheile von Interessen, welche sich nicht schicklich weiter verzinsen lassen, am zunehmenden Kapitale von Zeit zu Zeit ergänzt werden: allein für die Zwischenzeit, welche über eine ganze Anzahl Zahlungstermine verfließt, kann er nur auf einfache Zinsen Anspruch machen. Hiernach ist das Kapital k nach n Jahren $= ki^n$, und diese Summe als Kapital betrachtet erwächst mit den einfachen Zinsen während $\frac{1}{m}$ Jahre auf

$$K = ki^n[1 + \frac{1}{m}(i-1)] \ldots 39)$$

welcher Ausdruck aus 33) folgt, wenn man daselbst ki^n

statt k und $\frac{1}{m}$ statt n setzt: während in anderen Ländern auch in diesem Falle K nach 35) berechnet werden kann.

52. Ein Kapital k wird zu p Prozent angelegt, und nebst den Zinsen noch jährlich um die Größe a vermehrt: wie groß wird das Kapital nach n Jahren? k erwächst nach 35) in n Jahren auf ki^n, und der im ersten, zweiten, dritten ... (n—1)ten, nten Jahre verzinslich angelegte Betrag a, wird nach Verfluß desselben Zeitraumes beziehungsweise zu

ai^{n-1}, ai^{n-2}, ai^{n-3}, ... ai, a, welche Ausdrücke Glieder einer geometrischen Reihe sind, deren Summe nach 34) $\frac{a(i^n-1)}{i-1}$ beträgt; sonach hat man das gesuchte

Kapital $K = ki^n + \frac{a(i^n-1)}{i-1}$ ... 40)

Wird aber von dem Kapital k jährlich die Größe a weggenommen, so ist in der letzten Gleichung a negativ zu nehmen, wodurch

$$K = ki^n - \frac{a(i^n-1)}{i-1} \quad \text{... 41) wird.}$$

Soll hiedurch das Kapital k erschöpft werden, so hat man K = o, und die Gleichung 41) gibt die jährliche Einnahme des Gläubigers $a = \frac{ki^n(i-1)}{i^n-1}$ ... 42)

hiernach findet man auch den Werth einer Leibrente a, welche mit dem Schlusse eines jeden Jahres während n Jahre bezogen wird, nämlich $k = \frac{a(i^n-1)}{i^n(i-1)}$ ... 43)

Man vergleiche:

Abhandlung über die Zinsrechnung. Von Franz Kodesch von Treuenhorst. Lemberg 1800.

Abhandlung über die Rechnung bei veränderten Zahlungsterminen. Von eben demselben. Lemberg 1826.

53. Sei P die Volksmenge, N die jährlichen Geburten, M die Sterbefälle in irgend einem Lande, und eben so habe P_1, N_1, M_1, ferner P_2, N_2, M_2, ... dieselbe Bedeutung für die nächst folgenden Jahre, endlich setze man $\frac{P}{N} = n$, $\frac{P}{M} = m$, wodurch $P = Nn = Mm$, also $M = \frac{Nn}{m}$ wird; so erhält man

$P_1 = P + N - M = P\left(1 + \frac{m-n}{mn}\right)$: wofern nun die Verhältnißzahlen m, n unveränderlich sind, und man $1 + \frac{m-n}{mn} = q$ Kürze halber setzt, wird $P_1 = Pq$, $P_2 = P_1 q = Pq^2$, $P_3 = P_2 q = Pq^3$ ...; mithin wächst oder vermindert sich die Volksmenge, je nachdem $m > n$, oder $m < n$ ist. Ferner gibt die Relation $\frac{P}{M} = m$, $M = \frac{P}{m}$, $M_1 = \frac{P_1}{m} = \frac{Pq}{m} = Mq$, $M_2 = Mq^2$, $M_3 = Mq^3$, ... und eben so folgt:

$N = \frac{P}{n}$, $N_1 = \frac{Pq}{n} = Nq$, $N_2 = Nq^2$, $N_3 = Nq^3$ ...

daher bilden bei der gemachten Voraussetzung die jährlichen Volksmengen, Sterbefälle und Geburten in den auf einander folgenden Jahren geometrische Reihen, deren Quotient $= q$, und die Anfangsglieder beziehungsweise P, $\frac{1}{m}P$, $\frac{1}{n}P$ sind.

54. Man bezeichne nun mit I_1, I_2, I_3 ... die Verhältnißzahl der Lebenden in einem Alter von 1, 2, 3, ..

Jahren zu den Gebohrenen und mit M_0, M_1, M_2, ... die Sterbefälle vor dem 1ten, 2ten, 3ten ... Jahre, so ist Nl_1 die Zahl der lebenden Kinder in einem Alter von 1 Jahre und darunter, sonach $Nl_1 = N - M_0$, und $M_0 = N(1 - l_1)$; ferner ist wegen (53), die Zahl der ein Jahr vorher Gebohrenen $= \frac{N}{q}$, welche sich nach einem Jahre auf $\frac{Nl_1}{q}$, und nach zwei Jahren auf $\frac{Nl_2}{q}$ reduzirt, man hat also $M_1 = \frac{N}{q}(l_1 - l_2)$: eben so ist die Zahl der zwei Jahre vorher Gebohrenen $\frac{N}{q^2}$, mithin $M_2 = \frac{N}{q^2}(l_2 - l_3)$, u. s. f. Hieraus ergibt sich:

$$l_1 = 1 - \frac{M_0}{N},$$

$$l_2 = l_1 - \frac{M_1 q}{N} = 1 - \frac{M_0 + M_1 q}{N}$$

$$l_3 = 1 - \frac{M_0 + M_1 q + M_2 q^2}{N}, \text{ u. s. f. f. oder wenn } q = 1$$

ist, wird $M = N$, daher $Nl_1 = M - M_0$

$$Nl_2 = M - M_0 - M_1$$

$$Nl_3 = M - M_0 - M_1 - M_2, \ldots$$

man kann sonach aus den nach dem Alter geordneten Sterbelisten, die Zahl der in einem bestimmten Alter Lebenden oder Sterblichkeitstafeln entwerfen. Die Bevölkerung P ergibt sich aber, wenn man die Reihe N, $Nl_1 r$, $Nl_2 r^2$, $Nl_3 r^3$, ... fortgesetzt bis zum höchsten Menschenalter, summirt, wobei Kürze halber $\frac{1}{q} = r$ gesetzt wurde, es ist also

$$P = N(1 + l_1 r + l_2 r^2 + l_3 r^3 + \ldots l_{100} r^{100}) \ldots 44)$$

Nimmt die Bevölkerung eines Landes weder zu noch ab, so hat man $r = 1$, und dann

$$P = N(1 + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_{100}) \ldots 45)$$

Auf diese Art hat Mathieu die Zahlen der mit B. bezeichneten Spalte berechnet.

55. Wenn eine Gesellschaft ein Kapital in der Absicht zusammen schießt, daß jedes ihrer Mitglieder einen jährlichen Betrag l lebenslänglich aus der gemeinschaftlichen Kassa erhält, so heißt derselbe eine Lebensrente: wird aber von Jemanden irgend ein Kapital in der Absicht hinterlegt, daß ein bestimmtes jährliches Einkommen w bei dem Tode desselben für seine hinterlassene Wittwe lebenslänglich zahlbar wird, so heißt dasselbe eine Wittwenrente, und eben so eine Waisenrente, wenn das Einkommen dem nach dem Absterben beider Eltern hinterlassenen Kinde, bis es ein bestimmtes Alter erreicht, jährlich angewiesen werden soll.

56. Den Werth einer Lebensrente zu finden, sei L die Zahl der Personen, die im gleichen Alter von m Jahren der Gesellschaft beitreten, so zahlt die letztere ein Jahr darauf an alle Theilnehmer einen Betrag $L_1 l$, nach zwei Jahren $L_2 l$, nach 3 Jahren $L_3 l$, u. s. f. Der gegenwärtige Werth dieser Beträge ist nach Formel 38) wenn man Kürze halber $\frac{1}{i} = q$ setzt,

$L_1 lq$, $L_2 lq^2$, $L_3 lq^3$, . . . beziehungsweise; daher entfällt auf jeden Theilnehmer als Einlage, oder der Werth der Lebensrente

$$k = \frac{l}{L}(L_1 q + L_2 q^2 + L_3 q^3 + \ldots) \ldots 46)$$

und eben so erhält man für die um ein Jahr älteren Theilnehmer, den Werth derselben Lebensrente

$$k^1 = \frac{1}{L_1}(L_2 q + L_3 q^2 + L_4 q^3 + \ldots)$$

woraus so fort folgt: . . .

$$kL - qk^1 L_1 = ql.L_1, \text{ oder es ist}$$

$$k = \frac{qL_1}{L}(1 + k^1) \ldots 47)$$

mittelst welcher Formel man die Lebensrente irgend eines Alters, aus der Lebensrente des nächst höheren Alters finden kann.

57. Sei m das gemeinschaftliche Alter der Männer und n das der Frauen bei ihrem Eintritte in eine Gesellschaft, welche Wittwenrenten zusichert, man bezeichne mit $F, F_1, F_2 \ldots$ die Zahl der in einem Alter von n Jahren, und in den darauf folgenden Jahren Lebenden, so ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß eine Ehe, wo der Mann und die Frau das angegebene Alter hat, noch 1, 2, 3 . . . Jahre besteht, beziehungsweise

$$\frac{L_1 F_1}{LF}, \quad \frac{L_2 F_2}{LF}, \quad \frac{L_3 F_3}{LF}, \ldots$$

oder was dasselbe ist, unter LF Ehen beim Eintritte in die Gesellschaft, bestehen beziehungsweise nach 1, 2, 3 . . . Jahren nur noch $L_1F_1, L_2F_2, L_3F_3 \ldots$ Ehen: hätte der Unternehmer während der Dauer aller dieser Ehen einen jährlichen Betrag e an einzelne Ehepaare zu zahlen, so wäre der Werth einer solchen Ehrente

$$E = \frac{e}{LF}(L_1F_1q + L_2F_2q^2 + L_3F_3q^3 + \ldots) \ldots 48)$$

welcher Ausdruck aus 46) folgt, wenn man e statt 1, und $LF, L_1F_1, L_2F_2, \ldots$ statt $L, L_1, L_2, \ldots$ setzt: dagegen ist die Lebensrente der Frau nach 46)

$$K = \frac{w}{F}(F_1q + F_2q^2 + F_3q^3 + \ldots) \ldots 49)$$

weil hier w, $F, F_1, F_2, \ldots$ an die Stelle von

l, L, L_1, L_2, . . . tritt: setzt man nun noch in 48) w statt e, und zieht diesen Ausdruck von 49) ab, so erhält man den Werth einer Wittwenrente W

$$W = K - E \quad \ldots 50), \text{ oder}$$

$$W = \frac{w}{LF}[F_1 q(L - L_1) + F_2 q^2(L - L_2) + F_3 q^3(L - L_3) + \ldots] + Q \quad \ldots 51)$$

die Glieder der Ausdrücke 46), 48), 49) und 51) sind bis zum höchsten Alter in der Tafel fortzusetzen, im letzten Ausdrucke 51) bedeutet Q die Summe der $m - n$ Endglieder der Formel 49).

S. Anmerk. c.

58. Bei Waisenrenten sei m das Alter des Vaters, n der Mutter und r das Alter des Kindes beim Eintritt des letzteren in die Waisenanstalt: die jährliche Pension des Kindes soll s Gulden betragen, und bis zum tten Lebensjahre des Kindes ausgezahlt werden. Nennt man W den Werth dieser Rente, und bezeichnet mit R, R_1, R_2 . . . die Zahl der Lebenden in einem Alter von r, und darauf folgenden Jahren, so ist die Wahrscheinlichkeit daß Vater und Kind, Mutter und Kind, endlich daß alle drei noch 1, 2, 3 . . . Jahre leben, beziehungsweise:

$$\frac{L_1 R_1}{LR}, \frac{L_2 R_2}{LR}, \frac{L_3 R_3}{LR}, \ldots$$

$$\frac{F_1 R_1}{FR}, \frac{F_2 R_2}{FR}, \frac{F_3 R_3}{FR}, \ldots$$

$$\frac{L_1 F_1 R_1}{LFR}, \frac{L_2 F_2 R_2}{LFR}, \frac{L_3 F_3 R_3}{LFR}, \ldots$$

nun ist nach 49) die Lebensrente des Kindes bis zum Alter t

$$K = \frac{s}{R}(R_1 q + R_2 q^2 + R_3 q^3 + \ldots + R_{t-p} q^{t-p})$$

der Beitrag des Vaters während seiner Lebenszeit

$$N = \frac{s}{LR}(L_1R_1q + L_2R_2q^2 + \ldots + L_{t-p}R_{t-p}q^{t-p})$$

und während der Lebenszeit beider Eltern

$$P = \frac{s}{LFR}(L_1F_1R_1q + L_2F_2R_2q^2 + \ldots L_{t-p}F_{t-p}R_{t-p}q^{t-p})$$

endlich der Beitrag der Mutter während ihrer Lebenszeit

$$M = \frac{s}{FR}(F_1R_1q + F_2R_2q^2 + \ldots F_{t-p}R_{t-p}q^{t-p}),$$

woraus folgt $W = K - M - N + P$ . . . 52)

Wird aber die Pension bei dem Tode des Vaters also auch noch während dem Leben der Mutter ausgezahlt; so ist M und P null, daher $W = K - N$ wie bei Wittwenrenten, wenn man in 50) N statt E, also R statt F setzt. Man vergleiche

Anleitung zur Berechnung der Lebensrenten und Wittwenpensionen. Von J. J. Littrow. Wien 1829.

IX. Kettenbrüche.

59. Verbindet man mit dem Nenner eines Bruches den Zähler eines anderen Bruches, und mit dem Nenner desselben den Zähler eines dritten Bruches, u. s. f. so heißt der so entstehende Ausdruck ein Kettenbruch.

$$\text{z. B. } \cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\ldots}}}$$

die Zähler $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ so wie die Nenner $a, b, c \ldots$ können positive oder negative ganze Zahlen bedeuten: am merkwürdigsten sind jedoch die Kettenbrüche, deren Zähler sämmtlich gleich 1, und die zugehörigen Nenner positive ganze Zahlen sind, ihre allgemeine Form ist dann

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}}$$

die man auf abgekürzte Art so angeben kann:

$$x = a, b, c, d, \ldots \quad 53)$$

hiernach bedeutet $x = 3, 5, 7$ den Kettenbruch

$$x = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}$$

60. Man kömmt natürlich auf einen Kettenbruch, wenn man eine Größe x, die nicht durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann, näherungsweise bestimmen will: denn ist a die größte ganze Zahl, die in x enthalten ist; so hat man $x - a < 1$, also $\frac{1}{x-a} > 1$, und man kann $\frac{1}{x-a} = x_1$ setzen, und abermals die größte ganze Zahl b bestimmen, die in x_1 enthalten ist: hiedurch wird $x_1 - b < 1$, also $\frac{1}{x_1 - b} > 1$; setzt man wieder $\frac{1}{x_1 - b} = x_2$, und c die größte in x_2 enthaltene ganze Zahl, so ergibt sich $x_2 - c < 1$, also $\frac{1}{x_2 - c} = x_3 > 1$ u. s. f. welche Operation abbricht, oder ohne Ende fortlauft, je nachdem die Größe x rational oder irrational ist. Aus diesen Voraussetzungen erhält man so fort die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{1}{x_1} \\ x_1 &= b + \frac{1}{x_2} \\ x_2 &= c + \frac{1}{x_3} \\ &\text{und allgemein} \\ x_m &= n + \frac{1}{x_n} \\ x_n &= p + \frac{1}{x_p} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\ldots 54) \\ &\text{durch deren Verbindung} \\ &\text{der Kettenbruch} \end{aligned}$$

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{x_2}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{x_3}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \ldots + \frac{1}{n + \frac{1}{p + \frac{1}{x_p}}}}} \quad \ldots 55)$$

zum Vorschein kommt.

Man nennt die Zahlen a, b, c ... n, p die Nenner oder die Divisoren des Kettenbruches, hingegen die Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_p$ die Ergänzungen derselben, weil vermittelst jeder derselben der vollständige Werth der Größe x sich angeben läßt.

61. Ist $x = \frac{A}{B}$ ein unächter Bruch, und in einen Kettenbruch zu verwandeln, so sei a die in x enthaltene ganze Zahl, so daß $A = aB + C$ wird, wo C den Rest nach der Division bedeutet, dieß gibt

$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$: offenbar ist $\frac{C}{B} < 1$, also $\frac{B}{C} > 1$;

verfährt man nun so mit dem unächten Bruche $\frac{B}{C}$ und

setzt $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}, \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}, \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}$ u. s. f. ... 56)

wo die Größen b, c, d ... die Quotienten, hingegen C, D, E, ... die Reste der auf einander folgenden Divisionen vorstellen; so erhält man hieraus die Gleichungen

$$\frac{C}{B}=\frac{1}{b+\frac{D}{C}},\ \frac{D}{C}=\frac{1}{c+\frac{E}{D}},\ \frac{E}{D}=\frac{1}{d+\frac{F}{E}},\ \ldots$$

aus welchen sich der Kettenbruch

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}$$

ergibt, welcher nach der in 53) eingeführten Bezeichnung durch $x=a,b,c,d,\ldots$ vorgestellet werden kann. Die Gleichungen 56) geben zu erkennen, daß man bei Verwandlungen eines unächten Bruches in einen Kettenbruch den Zähler desselben dividiren muß durch den Nenner, und mit dem zum Vorschein kommenden Reste den Divisor, und so immer fort, mit jedem neuen Reste den zugehörigen Divisor, bis sich kein Rest zeigt: die sich hiebei nach und nach ergebenden Quotienten sind die Werthe der auf einander folgenden Nenner des Kettenbruches, während aus den Größen B, C, D, E ..., welche mit Ausnahme der ersten, die auf einander folgenden Reste bedeuten, die Ergänzungen der so eben bestimmten Nenner erhalten werden, wenn man immer jede derselben durch die nächst folgende theilt.

62. Sei der Kettenbruch $x=a,\ b,\ \ldots m,\ n,\ p,\ \ldots t$ gegeben, man bezeichne mit $\frac{N}{P}$ den gemeinen Bruch, der mit dem Kettenbruche $n,\ p\ \ldots\ t$ einerlei Werth hat, hiedurch wird

$$\frac{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\ldots+\frac{1}{t}}}} = \frac{m+\frac{1}{N}}{\frac{N}{P}} = \frac{mN+P}{N}$$

Wenn man daher, von dem letzten Nenner des Kettenbruches anfangend mit demselben die vorhergehenden Nenner nach und nach vereiniget, und die Ausdrücke in gemeine Brüche verwandelt, so ist der Nenner eines jeden folgenden Bruches dem nächst vorhergehenden Zähler N gleich, der Zähler aber des ersteren wird erhalten, wenn man N mit dem neu hinzugekommenen Divisor m multiplizirt, und den Nenner des vorhergehenden Bruches P hinzu addirt: um also den Bruch herzuleiten, der mit dem gegebenen Kettenbruche gleichen Werth hat, braucht man nur die Zähler der verschiedenen Brüche auf die eben angegebene Art zu entwickeln, und fährt man so fort bis sämmtliche Nenner des Kettenbruches an die Reihe gekommen sind, so ist die letzte so gefundene Zahl der Zähler, die vorletzte der Nenner des gesuchten Bruches. Nun ist der erste Bruch zugleich der letzte Nenner t, oder $\frac{t}{1}$; folglich muß man t und 1 zuerst annehmen, und um die übrigen Zähler bequemer herzuleiten, schreibe man 1 unter den letzten Nenner t, und t unter den vorletzten Nenner, und bestimme aus diesen zweien, und so auch ferner aus jeden zwei neben einander stehenden Zahlen, die nächste, indem man die zuletzt vorhergehende mit dem darüber stehenden Nenner multiplizirt, und hiezu die vorletzte addirt.

Z. B. Sei x = 2, 1, 3, 2, 4; so ist 4.2 + 1 = 9
111, 40, 31, 9, 4, 1 3.9 + 4 = 31

u. s. f.

Demnach hat man $\frac{111}{40} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$

63. Wenn ein Kettenbruch ohne Ende fortlauft, so erhält man einen Näherungswerth desselben, indem man von irgend einem Nenner an, alle folgenden wegläßt: bleibt man nun bei dem ersten, zweiten, dritten, ... Nenner stehen, und bezeichnet die ihnen gleichgeltenden gemeinen Brüche, welche daher Näherungsbrüche heißen, mit

$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'} \ldots$; so ist im Ausdrucke

$$x = a, b, c, \ldots m, n, p, q \ldots$$

$\frac{A}{A'} = a = \frac{a}{1}, \frac{B}{B'} = a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$; hieraus ergibt sich nun der folgende Näherungsbruch, wenn man $b + \frac{1}{c}$ statt b setzt, nämlich

$$\frac{C}{C'} = \frac{a(b+\frac{1}{c})+1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{abc+a+c}{bc+1} = \frac{Bc+A}{B'c+A'}$$

und allgemein sind $\frac{M}{M'}, \frac{N}{N'}, \frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}$, die Näherungsbrüche, welche man erhält, wenn man bei den auf einander folgenden Nennern m, n, p, q beziehungsweise stehen bleibt, und nimmt an, es sei, dem für $\frac{C}{C'}$ gefundenen Ausdrucke gemäß,

$$\frac{P}{P'} = \frac{Np + M}{N'p + M'} \quad \ldots 57)$$

so folgt hieraus $\frac{Q}{Q'}$, wenn man $p + \frac{1}{q}$ statt p setzt, dieß gibt

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{N(p+\frac{1}{q}) + M}{N'(p+\frac{1}{q}) + M'} = \frac{Npq + N + Mq}{N'pq + N' + M'q} = \frac{Pq + N}{P'q + N'}$$

es wird also dieser Bruch aus den zwei vorhergehenden nach dem nämlichen Gesetze gefunden, welches für den nächst vorhergehenden angenommen wurde. Hierauf gründet sich folgendes Verfahren, die Näherungsbrüche eines gegebenen Kettenbruches zu bestimmen: man schreibe sämmtliche Nenner desselben neben einander, setze unter den ersten $\frac{1}{0}$, unter den zweiten Nenner aber den ersten getheilt durch 1, und leite aus diesen zwei, und eben so aus jeden zwei auf einander folgenden Brüchen, den nächsten Bruch dadurch ab, daß man sowohl den Zähler als auch den Nenner des zuletzt gefundenen Bruches, durch die darüber stehende Zahl multiplizirt, und zu diesen Produkten beziehungsweise den Zähler und Nenner des vorhergehenden Bruches addirt. Im obigen Beispiele $x = 2, 1, 3, 2, 4$, findet man die Näherungsbrüche:

$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{25}{9}, \frac{111}{40}$.

Den vollständigen Werth eines solchen Kettenbruches erhält man nur dann, wenn man nach Formel 55) statt irgend eines Nenners p, dessen Ergänzung x_p sein mag, $p + \frac{1}{x_p} = z$ setzt, hiedurch wird aus 57)

$$x = \frac{Nz + M}{N'z + M'} \quad \ldots 58)$$

64. Sucht man den Unterschied, zweier auf einander folgenden Näherungsbrüche $\frac{N}{N'}$, $\frac{P}{P'}$ auf, so ergibt

sich wegen 57)

$$\frac{N}{N'} - \frac{P}{P'} = \frac{N}{N'} - \frac{Np+M}{N'p+M'} = -\frac{MN'-M'N}{N'P'}, \text{ ferner}$$

$$\frac{M}{M'} - \frac{N}{N'} = \frac{M'N-MN'}{M'N'}$$; sonach sind die Zähler beider Unterschiede nur dem Vorzeichen nach verschieden. Bei den ersten zwei Näherungsbrüchen $\frac{a}{1}$ und $\frac{ab+1}{b}$, ist aber dieser Zähler gleich -1, mithin ist er bei dem zweiten und dritten Näherungsbruche gleich $+1$, beim dritten und vierten gleich -1, und überhaupt ± 1, je nachdem der zu vermindernde Näherungsbruch in der Reihe der Näherungsbrüche eine gerade oder eine ungerade Stelle einnimmt. Hiernach ist

$$\frac{N}{N} - \frac{P}{P'} = \frac{\pm 1}{N'P'} \quad \ldots 59)$$

65. Da $NP' - N'P = \pm 1$ ist, so können N und N', oder P und P' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, weil sonst derselbe auch der Einheit zugehören müßte; es sind sonach Zähler und Nenner eines Näherungsbruches Primzahlen unter sich, und es läßt sich kein Näherungsbruch durch kleinere Zahlen genau angeben.

66. Die Formeln 58) und 59) geben

$$x - \frac{M}{M'} = \frac{z(M'N-MN')}{M'(N'z+M')} = \frac{\pm z}{M'(N'z+M')} \quad \ldots 60)$$

ferner

$$x - \frac{N}{N'} = -\frac{M'N-MN'}{N'(Nz+M')} = \frac{\mp 1}{N'(N'z+M')} = \delta \ldots 61)$$

Ist $\frac{M}{M'}$ ein ungerader Näherungsbruch, so hat man (64) $MN' - M'N = -1$, wodurch der Zähler in 60) positiv in 61) negativ wird, daher ist $x > \frac{M}{M'}$, und $x < \frac{N}{N'}$;

es sind also die auf einander folgenden Näherungsbrüche wechselweise kleiner und größer als der Kettenbruch: und weil nach (63), $z > p$, also auch $z > 1$, ferner $N' > M'$ ist, denn jeder folgende Näherungsbruch 57) wird ja aus den vorhergehenden zusammengesetzt, so ist immer der numerische Werth von $x - \frac{N}{N'}$ kleiner, als jener von $x - \frac{M}{M'}$, das ist, der Kettenbruch nähert sich jedem folgenden Näherungsbruche mehr als dem vorhergehenden. Nimmt man also den Näherungsbruch $\frac{N}{N'}$ für x, so begeht man einen Fehler

$\delta < \frac{1}{N'} \cdot \frac{1}{N'+M'}$ wegen $z < 1$, d. i. δ ist $< \frac{1}{N'N'}$, jeder Näherungsbruch drückt den gegebenen Kettenbruch so genau aus, daß der Unterschied kleiner ist, als die Einheit getheilt durch das Quadrat seines Nenners.

67. Bei einem Kettenbruche (61), der durch die Verwandlung eines Bruches entstanden ist, läßt sich jedoch der Unterschied zwischen diesem und irgend einem Näherungsbruche bequemer ausdrücken. Heißen nämlich Q, R zwei aufeinander folgenden Reste, so ist die Ergänzung des zugehörigen Nenners p immer $= \frac{Q}{R}$, sonach hat man (63) $z = p + \frac{R}{Q}$, und für diesen Werth, wird in 58)

$$x = \frac{A}{B} = \frac{(pQ+R)N + MQ}{(pQ+R)N' + M'Q}; \text{ mithin}$$

$$\frac{A}{B} - \frac{P}{P'} = \frac{A}{B} - \frac{Np+M}{N'p+M'} = \frac{R(M'N - MN')}{BP'} = \frac{+R}{BP'} \text{ d. i.}$$

der Unterschied zwischen einem gegebenen Bruche und irgend einem Näherungsbruche ist gleich dem zugehörigen Reste getheilt durch das Produkt der Nenner.

68. Sind $\frac{N}{N'}$, $\frac{O}{O'}$, $\frac{P}{P'}$ drei beliebige Brüche von denen der folgende immer größer ist, als der vorhergehende, so muß der Unterschied der beiden äußern größer sein, als jener zwischen diesen und dem mittleren Bruche: nimmt man nun an, es sei $PN' - P'N = 1$, so folgt $\frac{P}{P'} - \frac{N}{N'} = \frac{1}{P'N'} > \frac{ON' - O'N}{N'O'}$ und $> \frac{PO' - OP'}{O'P'}$: da die Zähler dieser Brüche ganze positive Zahlen bedeuten, so können sie nicht kleiner als 1 angenommen werden; setzt man sie aber $= 1$, so muß

$$N'P' < N'O' \text{ und } < O'P',$$

das ist, wenn man die gemeinschaftlichen Faktoren wegläßt, O' größer als P' und N' werden: und eben so folgt, wenn man die drei Brüche umkehrt, daß O größer als P und N ist; daher ist jeder Bruch $\frac{O}{O'}$ der zwischen zwei Näherungsbrüche fällt, durch keine so einfachen Zahlen ausgedrückt, als dieser selbst; mithin *nähert sich ein Näherungsbruch einem Kettenbruche mehr, als jeder einfacher ausgedrückte Bruch*: daher die Benennung dieser Brüche.

69. Für irgend einen Näherungsbruch $\frac{P}{P'}$, sei der Quotient p in 57) größer als die Einheit, so lassen sich folgende Brüche bilden:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{N+M}{N'+M'}, \quad \frac{\beta}{\beta'} = \frac{2N+M}{2N'+M'} \cdots \frac{\mu}{\mu'} = \frac{(p-1)N+M}{(p-1)N'+M'}$$

deren Anzahl $p-1$ ist, und deren Nenner sämmtlich zwischen N' und P' liegen: hat man nun

$\frac{N}{N'} > \frac{P}{P'}$, also $\frac{M}{M'} < \frac{N}{N'}$, wodurch $MP' - NP = +1$, und $MN' - MN = -1$ wird, so folgt

$$\frac{\mu}{\mu'} - \frac{P}{P'} = \frac{(p-1)N+M}{(p-1)N'+M'} - \frac{pN+M}{pN'+M'},$$

$$= \frac{MN' - MN}{\mu'P'} = \frac{1}{\mu'P'};$$

aber $\frac{N}{N'} - \frac{P}{P'} = \frac{1}{N'P'}$, daher ist ohne Rücksicht auf das Zeichen $\frac{N}{N'} - \frac{P}{P'} > \frac{\mu}{\mu'} - \frac{P}{P'}$, oder der Bruch $\frac{\mu}{\mu'}$ nähert sich $\frac{P}{P'}$ mehr, als der vorhergehende Näherungsbruch. Ferner ist

$\frac{N}{N'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{N}{N'} - \frac{N+M}{N'+M'} = \frac{1}{N'(N'+M')}$, und eben so

$\frac{N}{N'} - \frac{\beta}{\beta'} = \frac{1}{N'(2N'+M')}$, u. s. f. und allgemein

$\frac{N}{N'} - \frac{\mu}{\mu'} = \frac{1}{N'((p-1)N'+M')}$ mithin ist

$\frac{\alpha}{\alpha'} < \frac{\beta}{\beta'} < \ldots < \frac{\mu}{\mu'}$: diese Brüche nehmen also zu, und sind dabei sämmtlich kleiner als $\frac{N}{N'}$, und größer als $\frac{P}{P'}$: man nennt sie eingeschaltete Brüche, und man kann wie in (68) beweisen, daß zwischen ihnen kein Bruch liegen kann, der einfacher ausgedrückt wäre, daß sonach diese nebst den Näherungsbrüchen, zwischen welche sie fallen, einem Kettenbruche sich desto mehr nähern, je weiter sie in der Reihe der Näherungsbrüche stehen. Im obigen Beispiele

$x = 2, 1, 3, 2, 4$ waren die Näherungsbrüche . . . $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{25}{9}, \frac{111}{40}$: und es fallen zwischen $\frac{2}{1}$ und $\frac{11}{4}$ die eingeschalteten Brüche $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{3}$, ferner zwischen $\frac{11}{4}$ und $\frac{25}{9}$ der eing. Bruch $\frac{14}{5}$, zwischen $\frac{25}{9}$ und $\frac{111}{40}$ die eing. Brüche $\frac{36}{13}$, $\frac{61}{22}$, $\frac{86}{31}$. Hierunter sind die Brüche $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{36}{13}, \frac{61}{22}, \frac{86}{31} < x$, und $\frac{3}{1}, \frac{14}{5}, \frac{25}{9} > x$.

70. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange eines Kreises wird durch die unter dem Namen „Ludolphische Zahl" bekannte Größe $\pi = 3{,}1415926535\ldots$ ausgedrückt: wird der Bruch $\frac{3141592653}{1000000000}$ nach (61) in einen Kettenbruch verwandelt, so erhält man $\pi = 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots$ dessen Näherungsbrüche nach (63) sind:

$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \ldots$

Sucht man nach (69) die eingeschalteten Brüche, und sondert diejenigen Brüche, die kleiner als π sind von den übrigen ab, so erhält man zwei Reihen, deren Glieder sich der Größe π immer mehr und mehr nähern, sie sind:

$\frac{3}{1}, \frac{25}{8}, \frac{47}{15}, \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{113}{36}, \frac{135}{43}, \frac{157}{50}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71} \ldots$

und

$\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{104348}{33215}, \frac{312689}{99532}, \ldots$

71. Man nennt das tropische Sonnenjahr die Zeit, welche von einer Zurückkunft der Sonne zu denselben Nachtgleichen bis zur nächst folgenden verstreicht. Dieses Jahr ist 365.242242 Tage gleich. Verwandelt man den Bruch $x = \frac{242242}{1000000}$ in einen Kettenbruch; so folgt $x = 0, 4, 7, 1, 4, 2, 1 \ldots$ dessen Näherungsbrüche $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{39}{161}, \frac{86}{355} \ldots$ sind.

Wenn man die Länge des bürgerlichen Jahres der größeren Einfachheit wegen in runder Zahl gleich 365 Tagen annähme, so würde der Anfang dieses Jahres dem tropischen immer voreilen, und nach und nach

alle Jahreszeiten durchlaufen, und die Feste sowohl, als auch die Arbeiten beim Feldbau würden nicht mehr an bestimmte Jahreszeiten gebunden sein. Diesem wesentlichen Nachtheile eines für das Volk eingerichteten Kalenders wird durch Einschaltungen abgeholfen. Wählt man unter den obigen Näherungsbrüchen den Bruch $\frac{8}{33}$, welcher von x um weniger als $\frac{1}{33^2}$ unterschieden ist (66), so käme ein tropisches Sonnenjahr auf $355\frac{8}{33}$ Tage, und es würde die erwähnte Voreilung gehoben, wenn man je 33 Jahre, 8 Tage einschalten wollte: d. i. wenn man je 4 Jahre ein Schaltjahr von 366 Tagen und nach 7 solchen Schaltjahren, die einen Zeitraum von 28 Jahren umfassen, das achte Schaltjahr im fünften Jahre, wodurch die Periode von 33 Jahren voll wird, eintretten ließe. So war die Einschaltung der alten Perser beschaffen. Der Julianische Kalender, welcher ohne Ausnahme jedes durch 4 theilbare Jahr zu einem Schaltjahre einsetzt, stützt sich auf dem Näherungsbruch $\frac{1}{4}$: da aber die wahre Länge des tropischen Jahres 365.242242 ist, so ist das Julianische Jahr um 0.007758 zu groß, und die Differenz kann in 4 Jahrhunderten über 3 Tage ausmachen. Diesen Ueberschuß auszugleichen, ließ Pabst Gregor XIII. im Jahre 1582 in der Julianischen Zeitrechnung 10 Tage weglassen, nämlich auf den 4ten Oktober d. J. unmittelbar den 15ten folgen, und darauf mit Beibehaltung der Julianischen Einschaltung jedes durch 400 nicht theilbare Sekularjahr, wie 1700, 1800, 1900, 2100 ... zu einem gemeinen Jahr herabsetzen, wodurch auf je 400 Jahre 97 Tage eingeschaltet werden, mithin die Größe eines jeden Jahres nach 1582 auf $355\frac{97}{400}$ Tage gebracht wird; wenn gleich der Bruch $\frac{97}{400}$ unter den Näherungsbrüchen nicht vorkömmt, so ist diese Einschaltung sehr leicht im

Gedächtnisse zu behalten, und daher vorzüglich geeignet Irrungen in der Zeitrechnung vorzubeugen.

72. Der synodische Monat oder die Zeit zwischen zwei Neu- oder Vollmonden beträgt 29.5305887, und der zwölfte Theil des Jahres 30.4368535 Tage: das Verhältniß beider Zahlen, oder der Bruch $x = \frac{30436859}{29530587}$ gibt den Kettenbruch

$x = 1, 32, 1, 1, 2, 2, 3 \ldots$ dessen Näherungsbrüche $\frac{1}{1}, \frac{33}{32}, \frac{34}{33}, \frac{67}{65}, \frac{168}{163}, \frac{403}{391}, \ldots$ sind, schaltet man hier noch die Brüche $\frac{101}{98}$, und $\frac{235}{228}$ ein, so erhält man $\frac{1}{1}, \frac{34}{33}, \frac{101}{98}, \frac{168}{163}, \ldots < x$, und $\frac{33}{32}, \frac{67}{65}, \frac{235}{228}, \frac{403}{391}, \ldots > x$.

Der Bruch $\frac{235}{228}$ zeigt, daß auf 228 Monate oder 19 Jahre 235 synodische Monate kommen, der Unterschied beträgt etwa 5 Stunden. Man nennt diese Periode, nach welcher die Neu- und Vollmonde wieder auf dieselben Monatstage fallen, erfunden vom Meton 400 Jahre vor Ch. G. den Mondeszirkel, und die Zahl welche anzeigt, das wievielte ein gegebenes Jahr in dieser Periode ist, die goldene Zahl: da das Jahr 1 unserer Zeitrechnung das zweite des Mondeszirkels war, so ergibt sich die goldene Zahl für jedes nte Jahr nach Ch. G., gleich dem Reste der Division von $n + 1$ durch 19. Hingegen heißt Epakte eines Jahres die Anzahl Tage, welche seit dem letzten Neumonde bis zum 1ten Jäner d. Jahres verflossen sind, um welche nämlich die Neumonde von Jahr zu Jahr früher einfallen. Da nun das Sonnenjahr 365.24224, und 12 synodische Monate, oder das Mondjahr 354.36706 Tage enthält, so ist jenes um 10.875 Tage länger als dieses, wofür man in der kirchlichen Rechnung 11 Tage nimmt, und den Monat auf 30 Tage anschlägt, hierauf gründet sich die Regel: man multiplizire die goldene Zahl eines Jahres

mit 11, und ziehe das im Produkte enthaltene Vielfache von 30 ab, so gibt der Rest die Julianische Epakte. Die Gregorianische Epakte ist wegen (71) von 1582 bis 1700 um 10, von 1700 bis 1900 um 11, und von 1900 bis 2200 um 12 Tage kleiner, als die Julianische *).

Ein Hauptwerk über die Chronologie, ist: Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Von L. Ideler. Berlin 1825.

---

*) Bezeichnet man die ersten Tage des Jahres mit den 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g u. s. f. durch das ganze Jahr; so heißt derjenige unter ihnen, auf welchen der Sonntag fällt, der Sonntagsbuchstabe: nun hat ein gemeines Jahr $= 7.52 + 1$ Tage, ein Schaltjahr aber $= 7.62 + 2$ Tage, es endigt sich also jedes gemeine Jahr mit demselben Wochentage mit welchem es anfängt, das Schaltjahr hingegen mit dem nächst vorhergehenden Wochentage; woraus folgt, daß die Sonntagsbuchstaben jedes gemeine Jahr um eine Stelle, und jedes Schaltjahr um 2 Stellen rückwärts gehen; in dem letzteren fällt aber der Schalttag nach dem 23ten Februar ein, daher ändert sich der Sonntagsbuchstabe im Schaltjahre mit dem 24ten Februar. Hiernach schreiten die Sonntagsbuchstaben je 4 Jahre um 5 Stellen zurück, welches in 4.7 Jahren, 5.7 Stellen beträgt, d. i. je 28 Jahre fallen die Sonntagsbuchstaben auf dieselben Monatstage ein, welche Periode man den Sonnenzirkel nennt. Das 1te Jahr unserer Zeitrechnung war das 10te des Sonnenzirkels, demnach findet man, das wievielte ein Jahr n im Sonnenzirkel sei, wenn man den Rest der Division von $n + 9$ durch 28 aufsucht. Schließlich unterscheidet man noch eine Periode von 15 Jahren, die 3 Jahre vor Ch. G. ihren Anfang nimmt, und Römerzinszahl (Indiktion) genannt wird; man erhält sie für ein Jahr n nach Ch. G. gleich dem Reste der Division von $n + 3$ durch 15.

X. Die unbestimmte Analytik.

73. Die unbestimmte Gleichung des ersten Grades $ax - by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen, verwandle man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch, und bestimme dessen vorletzten Näherungsbruch $\frac{P'}{P}$: da der letzte $\frac{a}{b}$ selbst ist, so hat man 59)

$$\frac{P}{P'} - \frac{a}{b} = \frac{+1}{bP'}, \text{ oder } bP - aP' = \pm 1 \text{ d. i.}$$

$bcP - acP' = \pm c$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\frac{P}{P'}$ ein gerader oder ungerader Näherungsbruch ist. Bezeichnet aber t was immer für eine ganze Zahl, und man führt die identische Gleichung $-abt + abt = 0$ in die letzte Gleichung ein, so erhält man: $-abt + bcP + abt - acP' = \pm c$, oder $a(bt - cP') - b(at - cP) = \pm c$; hält man diese Gleichung gegen die vorgelegte, so zeigt sich sogleich, daß wenn $\frac{P}{P'}$ ein gerader Näherungsbruch ist, die Werthe

$x = -cP' + bt$, $y = -cP + at$, der Gleichung $ax - by = c$, Genüge leisten, wenn hingegen derselbe Näherungsbruch ein ungerader ist, die Zeichen in den Werthen von x und y geändert werden müssen, da aber t auch eine negative Zahl bedeuten kann, so folgt in diesem Falle $x = cP' + bt$, $y = cP + at$; mithin gibt allgemein die Gleichung

$$ax - by = c, \text{ die Werthe } \left\{\begin{matrix} x = \mp cP' + bt \\ y = + cP + at \end{matrix}\right\} \quad \ldots \quad 62)$$

Wäre endlich b negativ, so müßte man auch P negativ nehmen, um bP in der Gleichung $bP - aP' = \pm 1$ po-

sitiv zu machen: zugleich ist zu ersehen, daß die Koeffizienten a, b keinen gemeinschaftlichen Theiler haben dürfen, der nicht auch ein Faktor von c wäre, und welcher durch die Division aller Glieder wegfällt. Sei z. B. $105x - 43y = 17$, so hat man $a = 105$, $b = 43$, $c = 17$ ferner $\frac{105}{43} = 2, 2, 3, 1, 4$, also $\frac{P}{P'} = \frac{22}{9}$, mithin $P = 22$, $P' = 9$: hieraus folgt

$$x = -17.9 + 43t = -153 + 43t,$$
$$y = -17.22 + 105t = -374 + 105t.$$

Die Gleichung $424x + 115y = 539$, gibt $\frac{424}{115} = 3, 1, 2, 5, 7$, daher $\frac{P}{P'} = \frac{83}{16}$, und $x = -16.539 + 115t$ $= -8624 + 115t$, $y = 59.539 - 424t = 31801 - 424t$.

74. Die Gleichung $ax - by = c$ drückt offenbar die Bedingung aus, daß $\frac{ax - c}{b}$ eine ganze Zahl sei: gibt es nun mehrere solcher Bedingungen, oder daß auch $\frac{a'x - c'}{b'}$, $\frac{a''x - c''}{b''}$, . . . ganze Zahlen werden sollen; so suche man zuerst denjenigen Werth $x = m + bt$, der der ersten Bedingung Genüge leistet, substituire hierauf diesen Werth in der folgenden Gleichung, und bestimme den Werth von t, der den Ausdruck $\frac{a'bt + a'm - c'}{b'}$ zu einem Ganzen macht, den so gefundenen Werth von t substituire man in der Gleichung $x = m + bt$, und setze das Ergebniß statt x in die dritte Gleichung, und fahre so fort bis die letzte Gleichung an die Reihe kömmt, man erhält so einen Werth $x = M + Bt'$, wo B die kleinste Zahl bedeutet, die durch b, b', b'', . . . theilbar ist, t' aber was immer für eine ganze Zahl vorstellt. Z. B. den Werth von x zu finden, für welchen die Brüche

$\frac{4x-5}{9}$, $\frac{2x+1}{7}$, $\frac{4x+1}{5}$, $\frac{x-1}{16}$ ganze Zahlen würden? Die erste Bedingung gibt $x=-1+9t$, wodurch die folgende sich auf $\frac{18t-1}{7}$, oder wenn man die ganze Zahl 2t wegschafft, auf $\frac{4t-1}{7}$ reduzirt, hieraus folgt $t=2+7t'$, und $x=17+63t'$: nun gibt die dritte Bedingung $\frac{69+252t'}{5}$ oder $\frac{2(2+t')}{5}$, daher $t'=-2+5t''$, und $x=-109+315t''$: endlich erhält man aus der vierten $\frac{2+11t''}{16}$, also $t''=10+16z$, und $x=3041-5040z$, wo z eine beliebige ganze Zahl vorstellt.

75. Die Julianische Periode umfaßt einen Zeitraum von $19.28.15=7980$ Jahren, innerhalb dessen der Monds- Sonnen- und Indiktionszirkel ihren Umlauf gemeinschaftlich vollenden: das Jahr 1831 hat 8 im Mondszirkel, 20 im Sonnenzirkel, und 4 im Indiktionszirkel, das wievielte Jahr ist es in der Julianischen Periode? Bezeichnet t die gesuchte Jahrszahl, und sind a, b, c ganze Zahlen, welche den Gleichungen

$t=19a+8=28b+20=15c+4$ zugehören, so findet man t als denjenigen Werth, welcher die Brüche

$\frac{t-8}{19}$, $\frac{t-20}{28}$, $\frac{t-4}{15}$ zu ganzen Zahlen macht.

Nun wird die erste Bedingung erfüllt durch $t=19u+8$, für diesen Werth wird die zweite zu $\frac{19u-12}{28}$, und geht in eine ganze Zahl über, wenn $19u-12=28v$ ist, hieraus folgt nach (73), $u=28w+8$, $v=19w+5$ und

$$t=532w+160 \quad \ldots \quad 63)$$

Wäre also bloß von dem Wiedereintreffen des Monds- und Sonnenzirkels die Rede, so hätte man t aus 63), welcher Ausdruck zeigt, daß beide Cyklen je 532 Jahre wiederkehren: man nennt diesen Zeitraum die Dionysische Periode, in welcher das Jahr 1831 das 160te ist; aber es soll zugleich auch $\frac{t+4}{15}$, oder $\frac{532w+156}{15}$ eine ganze Zahl werden, dieß gibt $532w - 15x = -156$, welcher Gleichung nach (73) die Werthe $w = 312 + 15z$, oder wenn man die Vielfachen von 15 wegläßt, $w = 12 + 15z$, und $x = 156 + 532z$ Genüge leisten: substituirt man aber diesen Werth von w in 63), so erhält man

$t = 532.15z + 532.12 + 160$, oder $t = 7980z + 6544 \ldots 64)$

es ist also das Jahr 1831 das 6544te in der Julianischen Periode.

76. Bezeichnet m den Mondszirkel, s den Sonnenzirkel, i den Indikzionszirkel eines Jahres x nach Ch. G., so findet man auf einem ähnlichen Wege wenn man $z = 2$ setzt, aus m und s das zugehörige Jahr

$x = 56(s - m) + s + 75 + 532z \ldots 65)$, hingegen aus m, s und i

$x = 4845s + 4200m - 1064i + 3267 + 7980z \ldots 66)$

wo $z = 0$ zu setzen ist, da noch keine ganze Julianische Periode verflossen ist.

Wir beschließen diese chronologischen Bestimmungen mit der bekannten Gaußischen Regel die Ostern für irgend ein Jahr aufzufinden. Man dividire die gegebene Jahrzahl nach einander durch 19, 4, 7 und nenne die Reste beziehungsweise a, b, c: man dividire ferner $19a + m$ durch 30, und nenne den Rest d; endlich dividire $n + 2b + 4c + 6d$ durch 7, und bestimme den Rest e; so fällt immer der Ostersonntag den $(22 + d + e)$ten

März, wo der Ueberschuß über den 31ten März im nächstfolgenden Monate April zu nehmen ist. Im Julianischen Kalender, den die Russen noch immer brauchen, ist $m = 15$, $n = 6$: im Gregorianischen Kalender aber gilt von 1582 bis 1699 $m = 22$, $n = 2$, ferner

1700	— 1799	23	3
1800	— 1899	23	4
1900	— 2099	24	5
2100	— 2199	24	6
2200	— 2299	25	0
2300	— 2399	26	1
2400	— 2499	25	1

Wenn das Ergebniß im Gregorianischen Kalender über den 21. April ausfällt, so hat man immer 7 Tage abzuziehen.

Beispiele. Auf welchen Tag fällt Ostern im 1ten Jahre nach Ch. G.? Man hat

$$a = b = c = 1,\ d = 4,\ e = 1,$$ also den

$$22 + 4 + 1 = 27 \text{ März.}$$

Auf welchen Tag fällt Ostern im Jahre 1831?

Hier ist $a = 7$, $b = 8$, $c = 4$, ferner im Julianischen Kalender $d = 28$, $e = 0$, also den $22 + 28 = 50$ März d. i. den 19ten April: hingegen im Gregorianischen Kalender ist $d = 6$, $e = 6$, also den $22 + 6 + 6 = 34$ März, nämlich den 3ten April. Eben so ergeben sich im Jahre 1931 die Julianischen Ostern den 30ten März, die Gregorianischen den 5ten April.

Nach dem Ostersonntage richten sich in beiden Kalendern, die beweglichen Feste: der Sonntag 9 Wochen vor Ostern heißt Septuagesima, dann folgen bis Ostern die Sonntage Sexagesima, Quinquagesima, Invokavit, Reminiszere, Okuli, Lätare, Judika, und Palmsonntag. Vierzig Tage nach Ostern ist an einem Donnerstage der Himmelfahrtstag, und zehn Tage nachher der Pfingstsonntag.

Der nächste Sonntag nach Pfingsten heißt Trinitatis, und nach diesem werden alle übrigen Sonntage bis zum Adventsonntage, der immer zwischen den 27ten November und den 3ten Dezember fällt, gezählt. Den Dienstag nach Quinquagesima ist Fastnacht, und den Tag darauf der Aschermittwoch. Das Weitere über Kalendereinrichtungen lese man nach, in

Calendariographie oder Anleitung alle Arten Kalender zu verfertigen. Von J. J. Littrow. Wien 1828.

77. Sei r der Rest, den eine Quadratzahl x^2 durch m getheilt gibt, also $\frac{x^2 - r}{m}$ ein Ganzes; ist nun m eine gerade Zahl, so setze man $x = \frac{1}{2}m \pm a$, hiedurch wird $\frac{x^2}{m} = \frac{\frac{1}{4}m^2 \pm ma + a^2}{m} = \pm a + \frac{\frac{1}{4}m^2 + a^2}{m}$, da das zweite Glied dieses Ausdruckes von dem Vorzeichen der Größe a nicht abhängt, so ist der Rest der Division derselbe, man mag $x = \frac{1}{2}m + a$, oder $x = \frac{1}{2}m - a$ nehmen; setzt man daher für x die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, . . . $\frac{1}{2}m$, so werden die Reste sobald man $x = \frac{1}{2}m$ überschritten hat, in umgekehrter Ordnung wiederkehren, und eine Periode von $m - 1$ Gliedern bilden: ist aber m eine ungerade Zahl, so ist $\frac{1}{2}(m \pm 1)$ ein Ganzes, setzt man nun $x = \frac{1}{2}(m+1) + a$, und dann $x = \frac{1}{2}(m-1) - a$, so erhält man für $\frac{x^2}{m}$ denselben Rest $= \frac{1}{4}(m \pm 1)^2 + a + a^2$, also gilt auch hier dasselbe Gesetz, nur daß die Periode in ihrer Mitte zwei gleiche Glieder erhält. Ist endlich $x = km + a$; so folgt eben so

$\frac{x^2}{m} = k^2 m + 2ak + \frac{a^2}{m}$: die Reste sind für Zahlen $x > m$ dieselben, wie bei Zahlen $x = a < m$.

z. B. Für $m = 15$ ist die Periode 1, 4, 9, 1, 10, 6, 4, 4, 6, 10, 1, 9, 4, 1: da diese Perioden mit den Quadratzahlen die m nicht übersteigen anfangen, und von der Mitte an symmetrisch fortlaufen, so kann man sie kürzer so angeben: 1, 10, 6, 4. Hiernach ist folgende Tafel eingerichtet:

m	Periode	m	Periode	m	Periode
6	3	15	1,10, 6,4	25	0,11,24,14, 6, 0,21,19
7	2	16	0, 9, 4, 1, 0	27	9,22,10, 0,19,13, 9, 7
8	1,0	17	8, 2,15,13	29	7,20, 6,23,13, 5,28,24,22
9	0,7	18	7, 0,13,10, 9	31	25, 5,18, 2,19, 7,28,20,10, 8
10	6,5	19	6,17,11, 7, 5	37	12,27, 7,26,10,33,21,11, 3
11	5,3	20	5,16, 9, 4, 1,0		34,30,38
12	4,1, 0	21	4,15, 7, 1,18,16	41	8,23,40,18,39,21, 5,32,20
13	3,12,10	22	3,14,5,20,15,12,11		10, 2,37,33,31
14	2,11, 8,7	23	2,13, 3,18,12, 8,6	43	6,21,38,14,35,15,40,24,10,41

78. Aus der periodischen Wiederkehr der quadratischen Reste folgt, daß der Ausdruck $\frac{x^2 - r}{m}$ nur dann ein Ganzes wird, wenn r eines der Glieder der für m zugehörigen Periode ist: geschieht dieses für einen Werth $x = a$, so erhält man alle übrigen Werthe aus der Gleichung $x = km \pm a$, wo k eine beliebige ganze Zahl vorstellt. Z. B. Die Gleichung $13y = x^2 + 40$ gibt für $\frac{x^2 + 40}{13}$ oder $\frac{x^2 - 12}{13}$ eine ganze Zahl: da in der Periode von $m = 13$, der Rest 12 an der 5ten Stelle (von Anfang gerechnet) vorkömmt, so gibt $x = 13k \pm 5$ diejenigen Werthe, welche jener Gleichung Genüge leisten. Eben so erhellet, daß die Gleichung $x^2 = 17y + 7$ in ganzen Zahlen nicht aufgelöset werden kann, weil 7 in der Periode von $m = 17$ nicht vorkömmt. Endlich läßt sich die Gleichung $x^2 - 4 = 12y$, da 4 unter den Resten von 12 an der 2ten und 4ten Stelle erscheint, durch die Werthe $x = 12k \pm 2$, $x = 12k \pm 4$ auflösen.

Hiernach kann man auch die Gleichung $my = ax^2 + bx + c$ in ganzen Zahlen auflösen: zu diesem Ende multiplizire man sie mit a, so erhält man leicht $ay = \frac{(ax+b)^2 - (b^2 - ac)}{m}$, sei $ax + b = u, b^2 - ac = d$, so folgt $ay = \frac{u^2 - d}{m}$: bestimmt man nun die Werthe $u = kn \pm \alpha$, welche diesen Bruch zu einem Ganzen machen, und löst hierauf die Gleichung $ax + b = kn \pm \alpha$ in Beziehung auf x, so erhält man diejenigen Werthe von x, welche der vorgelegten Gleichung Genüge leisten.

79. Sei nun die quadratische Gleichung $A'x^2 - 2Ax = k$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Die bekannte Auflösungsweise gibt $x = \frac{A + \sqrt{(A^2 + A'k)}}{A'} = \frac{A + \sqrt{w}}{A'}$, wenn man die Größe unter dem Wurzelzeichen oder $A^2 + A'k$ mit w bezeichnet: ist a die größte in x enthaltene ganze Zahl, und x_1 ihre Ergänzung, so hat man

$$x = a + \frac{1}{x_1} = \frac{A + \sqrt{w}}{A'}, \quad x_1 = \frac{A'}{\sqrt{w} + A - A'a};$$

setzt man $A'a - A = B$, und multiplizirt den Zähler und Nenner von x_1 mit $B + \sqrt{w}$, so erhält man $x_1 = \frac{A'(B + \sqrt{w})}{w - B^2}$; allein es folgt aus den angenommenen Werthen von w und B, die Größe $w - B^2 = A'(k - A'a^2 + 2Aa) = A'B'$, zur Abkürzung, demnach wird $x_1 = \frac{B + \sqrt{w}}{B'}$: eben so findet man, wenn b die größte in x_1 enthaltene Zahl und x_2 ihre Ergänzung bedeutet, wegen

$$x_1 = b + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = \frac{B'}{\sqrt{w} + B - B'b}, \text{ und wenn man}$$

zur Abkürzung $B'b - B = C$ setzt, und mit $C + \sqrt{w}$ Zähler und Nenner multiplizirt, $x_2 = \frac{B'(C+\sqrt{w})}{w - C^2}$,

allein $w - C^2 = w - B'^2 b^2 + 2B'Bb - B^2$ und $w - B^2 = A'B'$, sonach $w - C^2 = B'(A' - B'b^2 + 2Bb) = B'\beta'$, wodurch $x_2 = \frac{C + \sqrt{w}}{C'}$ wird. Setzt man den für x_1 und x_2 erhaltenen Werthen gemäß

$x_m = n + \frac{1}{x_n} = \frac{H + \sqrt{w}}{H'}$, $x_n = p + \frac{1}{x_p} = \frac{J + \sqrt{w}}{J'}$,

$x_p = \frac{K + \sqrt{w}}{K'}$; so folgt $x_m = \frac{1}{x_m - n} = \frac{H'}{H + \sqrt{w} - nH'}$,

daher hat man $\frac{H'}{H + \sqrt{w} - nH'} = \frac{J + \sqrt{w}}{J'}$, und hieraus erhält man, wenn man die rationalen Glieder einander gleich setzt, die Gleichungen: $H'J' = HJ - nH'J + w$, und $J + H - nH' = o$; die letzte Gleichung gibt so fort: $J = nH' - H$, und wenn man hieraus $H + J$ statt nH' in die erstere setzt, wird $J' = \frac{w - J^2}{H'}$: und eben so folgt $K = nJ' - J$, $K' = \frac{w - K^2}{J'}$, oder hierin statt K^2 seinen Werth substituirt, wird

$K' = \frac{w - J^2}{J'} + 2nJ - n^2 J' = H' + nJ - nK$ d. i.

$K' = H' + n(J - K)$, man wird also aus zwei Ergänzungen $\frac{H + \sqrt{w}}{H'}$, $\frac{J + \sqrt{w}}{J'}$ die nächstfolgende $\frac{K + \sqrt{w}}{K'}$ ableiten, wenn man K, und K' mittelst der Gleichungen bestimmt,

$$K = nJ' - J,\ K' = H' + n(J - K) \ldots 67)$$

Vereinigt man nun die für $x, x_1, x_2 \ldots x_n, x_p$ gefundenen Ausdrücke, so erhält man aus 55)

$$x = \frac{A + \sqrt{w}}{A'} = a + \frac{B'}{B + \sqrt{w}} = a, b, \ldots p + \frac{K'}{K + \sqrt{w}}$$

80. Wenn $\frac{M}{M'}, \frac{N}{N'}$ zwei auf einander folgende Näherungsbrüche bedeuten, und $x_n = p + \frac{1}{x_p} = z = \frac{J + \sqrt{w}}{J'}$ gesetzt wird, so hat man nach 58)

$x = \frac{Nz + M}{N'z + M'} = \frac{N(J + \sqrt{w}) + MJ'}{N'(J + \sqrt{w}) + M'J'}$, es ist aber auch $x = \frac{A + \sqrt{w}}{A'}$, daher $\frac{A + \sqrt{w}}{A'} = \frac{N(J + \sqrt{w}) + MJ'}{N'(J + \sqrt{w}) + M'J'}$

Diese Gleichung gibt, wenn man die rationalen Theile einander gleich setzt:

$J(A'N - AN') = J'(AM' - A'M) + N'w$, und

$JN' = A'N - AN' - J'M'$, substituirt man aber den Werth von J aus der zweiten dieser Gleichungen in die erste, und bemerkt daß $M'N - MN' = \pm 1$ ist, so erhält man den Ausdruck $(A'N - AN')^2 = N'^2 w \pm A'J'$, setzt man hierin statt w den Werth $A^2 + A'k$, und dividirt durchgängig mit $A'N'^2$, so ergibt sich:

$$A'\left(\frac{N}{N'}\right)^2 - 2A\left(\frac{N}{N'}\right) - k = \pm\frac{J'}{N'^2} \ldots 68)$$

Ist $\frac{N}{N'}$ ein gerader Näherungsbruch, also $M'N - MN' = +1$; so ist $\frac{N}{N'} > x$ (66), daher erhält die Gleichung

$A'x^2 - 2Ax - k = 0$ für diesen Werth von x einen positiven Werth, folglich ist J' positiv: wofern aber derselbe Näherungsbruch ein ungerader ist, also $M'N - MN' = -1$,

so ist $\frac{J'}{N'^2}$ mit dem unteren Zeichen zu nehmen, mithin wird J' abermahls positiv, wenn nur das Glied links des Gleichheitszeichens negativ ist: zerfällt man jedoch die quadratische Gleichung in die Faktoren $(x-r)(x-r')$, so bleibt ihr Produkt positiv, so oft beide Wurzeln r und r' größer sind als der Näherungsbruch, und dann fällt J' negativ aus; die Nenner der Ergänzungen sind daher immer positiv, außer wenn die ungeraden Näherungsbrüche kleiner sind als jede der zwei Wurzeln.

81. Sobald sich also die Näherungsbrüche den Wurzeln einer quadratischen Gleichung so weit genähert haben, daß diese zwischen zwei auf einander folgende Näherungsbrüche nicht zugleich fallen, so werden die Nenner der Ergänzungen von da an, und bei allen folgenden Ergänzungen stets positiv. Ist aber der Nenner J' einer Ergänzung negativ, so muß es auch der Zähler $J+\sqrt{w}$ sein, und da jede Ergänzung $\frac{J+\sqrt{w}}{J'} > 1$ ist, so folgt der Zähler solcher Ergänzungen $J > \sqrt{w}$; ferner gibt die Gleichung $H'J' = w - J^2$ zu erkennen, daß H', J' und J^2 kleiner sind als w, das ist: es sind die Nenner aller übrigen Ergänzungen kleiner als w, während ihre Zähler kleiner sind als $\sqrt{w}$: andererseits hat man aus 67) $J+K = nJ'$, also $J' < J+K < 2\sqrt{w}$. Da also sowohl die Zähler $H, J, K \ldots$ als auch die Nenner $H', J', K' \ldots$ stets positive ganze Zahlen bedeuten, und dabei innerhalb bestimmter Grenzen enthalten sind, so müssen sie früher oder später wiederkehren, und in derselben Ordnung wieder auf einander folgen, es bilden also die ohne Ende fortlaufenden Ergänzungen von irgend einem Gliede an, eine Periode. Wir werden den

periodischen Theil eines Kettenbruches in Klammern einschließen, um ihn von den nicht wiederkehrenden Gliedern zu unterscheiden, hiedurch entsteht

$$x = a, b, c \ldots l(m, n, p, \ldots t) \ldots 69)$$

82. Die kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung anlangend, hat man $x = \frac{A - \sqrt{w}}{A'}$; ist a' die in x enthaltene ganze Zahl, so folgt

$x_1 = \frac{A'}{A - A'a' - \sqrt{w}}$, setzt man $A - A'a' = B_1$, und multiplizirt Zähler und Nenner mit $B_1 + \sqrt{w}$, so erhält man $x_1 = \frac{A'(B_1 + \sqrt{w})}{B_1^2 - w}$, und man kann wie in (79) beweisen, daß A' als ein Faktor von $B_1^2 - w$ wegfällt, wodurch x_1 die Form $\frac{B + \sqrt{w}}{B'_1}$ erhält; es gelten also von dieser alle über jene Wurzel abgeleiteten Schlüße, mit dem Unterschiede, daß die den periodischen Theil des Kettenbruches bildenden Glieder: m, n, p ...t in umgekehrter Ordnung zum Vorschein kommen: man erhält sonach für die kleinere Wurzel einen Ausdruck

$$x = a', b', c', \ldots (t, \ldots p, n, m)$$

Sei z. B. $59x^2 - 319x + 431 = 0$: da der Koeffizient von x ungerade ist, so multiplizire man die Gleichung mit 2, und man erhält

$A' = 118, A = 319, K = -862, A^2 = 101761, A'K = -101716,$

also $w = 45$, hieraus $x = \frac{319 + \sqrt{45}}{118} = 2+$, ferner

$B = -83, B' = -58$, mithin $x_1 = \frac{\sqrt{45} - 83}{-58} = 1+$;

die folgenden Ergänzungen findet man nun mittelst der Gleichung 67), nämlich: $x_2 = \frac{\sqrt{45} + 25}{10} = 3+$,

$x_3 = \frac{\sqrt{45}+5}{2} = 5+$, $x_4 = \frac{\sqrt{45}+5}{10} = 1+$,

$x_5 = \frac{\sqrt{45}+5}{2} = 5+$, u. s. f.; daher ist $x = 2, 1, 3\,(5,1)$.

Die kleinere Wurzel gibt $x = \frac{319-\sqrt{45}}{118} = 2+$,

$\frac{\sqrt{45}+83}{58} = 1+$, $\frac{\sqrt{45}-25}{-10} = 1+$, $\frac{\sqrt{45}+15}{18} = 1+$

$\frac{\sqrt{45}+3}{2} = 4+$, $\frac{\sqrt{45}+5}{10} = 1+$, da diese Ergänzung bei der ersten Wurzel bereits vorkömmt, so bricht hier die Rechnung ab, und man hat $x = 2, 1, 1, 1, 4\,(1,5)$.

Eben so findet man die Wurzeln der Gleichung $2x^2 - 14x + 17 = 0$, $x = 5\,(2,3)$, und $x = 1, 1, 1\,(3,2)$: die Wurzeln der Gleichung

$1801x^2 - 3991x + 2211 = 0$, $x = 1, 9, 8\,(1, 1, 5)$,

und $x = 1, 9, 2, 2\,(5, 1, 1)$.

83. Hieraus ergibt sich die Auflösung der unbestimmten Gleichung des zweiten Grades $az^2 + 2byz + cy^2 = M$, in ganzen Zahlen, wenn $b^2 - ac$ positiv und keine Quadratzahl ist: denn setzt man $a = A'$, $b = -A$, $c = -k$, und $M = J'$; so erhält man $A'z^2 - 2Ayz - ky^2 = J'$. Entwickelt man aber die größere Wurzel der Gleichung $A'x^2 - 2Ax = k$ in einen Kettenbruch, und bezeichnet mit $\frac{N}{N'}$ den Näherungsbruch, welcher der Ergänzung $\frac{J+\sqrt{w}}{J'}$ vorangeht, so findet nach 68) die Bedingungsgleichung Statt:

$A'N^2 - 2ANN' - kN'^2 = \pm J'$, welche mit der gegebenen verglichen, die Werthe $z = N$, $y = N'$ gibt, sobald die Vorzeichen der Größe J' in beiden Gleichungen über-

einstimmen, d. i. wenn J' positiv, und der Näherungsbruch dessen Ergänzung den Nenner J' enthält, ein gerader ist, oder aber J' negativ, und der Näherungsbruch ein ungerader ist: das Gegentheil hat bei der kleineren Wurzel Statt. Findet sich die Ergänzung mit dem Nenner J' in dem periodischen Theile des Kettenbruches, so erhält man dann eine beliebige Anzahl von Auflösungen. Z. B. Sei $2z^2 - 14yz + 17y^2 = 5$: sucht man die kleinere Wurzel von $2x^2 - 14x + 17 = 0$, so ergibt sich der Nenner von x_2 gleich 5, mithin liefert der Näherungsbruch $\frac{1}{1}$ die Auflösung jener Gleichung $z = 1$, $y = 1$. Wäre hingegen das zweite Glied der Gleichung -3, so fände man bei der größeren Wurzel alle geraden Ergänzungen mit dem Nenner 3, mithin geben alle ungeraden Näherungsbrüche $\frac{5}{1}$, $\frac{38}{7}$, $\frac{299}{55}$ . . . die zugehörigen Werthe von z und y, daher gilt für z, 5, 38, 299, . . für y, 1, 7, 55, . . .: bei der kleineren Wurzel geben, aus gleichem Grunde die geraden Näherungsbrüche $\frac{2}{1}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{86}{55}$, . . . eine zweite Reihe von Auflösungen derselben Gleichung.

84. Da die Näherungsbrüche aus Primzahlen unter sich bestehen, so erhält man hiedurch keinen derjenigen Werthe für z und y, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben. Ist aber $z = qz'$, $y = qy'$, so gibt obige Gleichung $q^2(az'^2 + 2bz'y' + cy'^2) = M$, und es muß M durch q^2 theilbar sein, setzt man also $M = q^2 M'$, und dividirt beiderseits mit q^2, so folgt: $az'^2 + 2bz'y' + cy'^2 = M$ eine Gleichung, die der vorgelegten ähnlich ist. So oft also M ein Vielfaches einer Quadratzahl ist, kann man noch Auflösungen finden, welche die Wurzel derselben zum gemeinschaftlichen Faktor haben. Auf diese Art gestattet die Gleichung $z^2 + 2zy - 5y^2 = 9$ keine Auf-

lösungen, die Primzahlen unter sich sind, allein löset man die Gleichung $z'^2 + 2z'y' - 5y'^2 = 1$ nach (83) auf, so findet man die Näherungsbrüche $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{29}{13}, \frac{87}{39} \ldots$ welche ihr Genüge leisten, mithin geben ihre Produkte mit 3 die gesuchten Werthe von

z: 3, 9, 87, 861, . . .; y: 0, 6, 60, 594, . . .

85. Wenn in der vorgelegten Gleichung $az^2 + 2byz + cy^2 = M$, die Größe M nicht kleiner ist als $2\sqrt{w}$, oder, weil $w = A^2 + A'k$ (79) und mit Rücksicht auf die in (83) gemachten Voraussetzungen $w = b^2 - ac$ ist, mithin M nicht kleiner ist als $2\sqrt{(b^2 - ac)}$; so wird man unter den Nennern der Ergänzungen die Größe M nie antreffen: ist aber f ein Faktor von M, nämlich $M = fM'$, q irgend eine ganze Zahl, so setze man $y = qz + fy'$; sucht man nun nach (78) die Werthe von q, welche $\frac{a + 2bq + cq^2}{f}$ zu einem Ganzen machen, und bezeichnet dasselbe mit A, und eben so $b + cq$ mit B, cf mit C, so erhält man eine Gleichung

$Az^2 + 2By'z + Cy'^2 = M'$, in welcher M' kleiner sein kann als $2\sqrt{(B^2 - AC)}$, und nach (83) aufgelöset wird.

Z. B. Die Gleichung $66z^2 - 18yz + y^2 = 34$, gibt $f = 17$, und $q = 2$, oder 15, demnach ist $y = 17y' + 2z$, oder $= 17y' + 16z$, endlich die transformirte Gleichung

$2z^2 \pm 14y'z + 17y'^2 = 2$, welcher die Werthe

$z = 1, 11, 87, \ldots 3, 25, \ldots$ und beziehungsweise

$y = 2, 56, 446 \ldots 40, 322, \ldots$ und auch

$y = 16, 142, 1120, \ldots 14, 128, \ldots$ Genüge leisten.

86. Wenn in der vorgelegten Gleichung $az^2 + 2byz + cy^2 = M$, die Größe $b^2 - ac$ positiv und eine Quadratzahl $= k^2$ ist, so multiplizire man sie mit a, und zerlege das Glied links des Gleichheitszeichens in

Faktoren, man erhält so
$[az + y(b + k)][az + y(b - k)] = aM$: sind nun p, q Zahlen deren Produkt aM ist, so folgt durch Vergleichung $p = az + y(b + k)$, $q = az + y(b - k)$, also $y = \frac{p - q}{2k}$, $z = \frac{p - y(b + k)}{a}$. Zerfällt man daher aM auf jede mögliche Weise in zwei Faktoren, sind substituirt dieselben nach und nach statt p und q, so werden diejenigen unter ihnen, welche y und z zu ganzen Zahlen machen, die gesuchten Werthe sein.

Ist aber $b^2 - ac$ negativ $= -k$, so gibt die Gleichung $(az + by)^2 + k y^2 = aM$, oder für $u = az + by$, das Resultat $u^2 + k y^2 = aM$; aus welchem sich z ergibt, wenn man nach und nach y gleich 0, 1, 2, 3 ..., sein läßt, und unter diesen diejenigen Werthe beibehält, für welche $aM - k y^2$ ein vollständiges Quadrat ist: mittelst der so bestimmten Werthe von y und u, gibt dann die Gleichung $u = az + by$ die Werthe von z.

Ist endlich $b^2 - ac = 0$, so folgt aus der Gleichung sofort $(az + by)^2 = aM = q^2$, mithin ergeben sich die Werthe von z und y aus der einfacheren Gleichung $az + by = q$.

Beispiele. Die Gleichung $4z^2 + 18yz + 14y^2 = 76$ gibt $a = 4$, $c = 14$, $b = 9$, $b^2 - ac = 25$, $k = 5$, $aM = 304$, dessen Faktorenpaare sind: 2.152, 8.38, 4.76, 1.304, unter denen die beiden ersten $y = 15$ und 3, $z = 53$ und 1 geben. Sei ferner $3z^2 - 2zy + 7y^2 = 27$, oder $(3z - y)^2 + 20y^2 = 81$: die Werthe, welche $81 - 20y^2 = u^2$ zu einem Quadrat machen, sind $y = 0$, und 2, für welche $u = 9$ und 1, $z = 3$ und 1 wird.

87. Bei Verwandlung einer reinen quadratischen Gleichung $x^2 = k$ in einen Kettenbruch lassen sich die ohne Ende fortlaufenden Ergänzungen nach demselben Ge-

setze ableiten, wie (79), nur daß bei der ersten Ergänzung $\frac{A+\sqrt{w}}{A'}$, statt A, A', w beziehungsweise 0, 1, k zu setzen ist, wodurch dieselbe in $\frac{\sqrt{k}}{1}$ übergeht. Seien $\frac{L}{L'}$, $\frac{M}{M'}$ zwei Näherungsbrüche und $\frac{H+\sqrt{k}}{H'}=z$ die dem letzteren zugehörige Ergänzung, so ist nach 57)

$x=\frac{Mz+L}{M'z+L'}=\frac{M\sqrt{k}+MH+LH'}{M'\sqrt{k}+M'H+L'H'}=\sqrt{k}$, setzt man die irrationalen Glieder einander gleich, so folgt

$M=M'H+L'H'$, und hieraus $H=\frac{M}{M'}-\frac{L'H'}{M'}$, aber $\frac{M}{M'}$ besteht aus der Zahl a und irgend einem Bruche $\frac{r}{M'}$, nämlich $\frac{M}{M'}=a+\frac{r}{M'}$, mithin ist $a-H=\frac{L'H'-r}{M'}$, und da $L'<M'$; so ist $a-H<H'$.

Es bilde $\sqrt{k}$ den periodischen Kettenbruch

$\sqrt{k}=a, b, \ldots l, m, n, \ldots t, m, n \ldots t, m, \ldots$

man bezeichne die den Divisoren l, m, ... t, m ... zugehörigen Näherungsbrüche mit $\frac{L}{L'}\frac{M}{M'}, \cdots \frac{T}{T'}\frac{M_1}{M_1}, \ldots$ und die Ergänzungen mit x_l, x_m, ... x_t, x_m, und es sei $x_l=\frac{G+\sqrt{k}}{G'}$, $x_t=\frac{R+\sqrt{k}}{R'}$, so hat man den Gleichungen 67) gemäß:

$k-H^2=G'H'$, und auch $k-H^2=R'H'$, also $G'=R'$, ferner $H=lG'-G$, und auch $H=tR'-R$, folglich $(l-t)G'=G-R$: allein gleichwie $a-H<H'$, so ist auch $a-G<G'$, und $a-R<R'$, mithin $G-R<R'-G'=o$, da aber $G-R$ eine ganze Zahl

$(l-t)G'$ beträgt, so muß auch $l-t=o$, oder $l=t$ sein: eben so folgt daß die den Größen l und t vorangehenden Divisoren einander gleich sind, so zwar, daß bei der Verwandlung von $\sqrt{k}$ in einen Kettenbruch, mit Ausnahme der ersten ganzen Zahl a, sämmtliche Divisoren b, c, d ... eine Periode bilden; man hat daher

$$\sqrt{k}=a\,(b, c, d, \ldots l).$$

88. Damit auf den Divisor l wieder b folgen, und die Periode sich wiederholen kann, müssen die Ergänzungen a und l einander gleich werden, daher $\frac{1}{\sqrt{k}-a}=\frac{1}{z-l}$, nämlich $z=l-a+\sqrt{k}$ sein: bezeichnet man mit $\frac{J}{J'}$ den Näherungsbruch, welcher vor $\frac{L}{L'}$ steht, und mit z die zugehörige Ergänzung, so ist nach 57)

$\sqrt{k}=\frac{Lz+J}{L'z+J'}=\frac{L\sqrt{k}+L(l-a)+J}{L'\sqrt{k}+L'(l-a)+J'}$; setzt man die irrationalen Glieder dieses Ausdrucks einander gleich; so folgt hieraus $\frac{L}{L'}=l-a+\frac{J'}{L'}$; und weil $J'<L'$ ist, so bedeutet $l-a$ die größte in $\frac{L}{L'}$ enthaltene ganze Zahl: allein diese ist $=a$, mithin hat man $l-a=a$, oder $l=2a$: das letzte Glied der Periode für $\sqrt{k}$ ist immer $2a$.

89. Da in dem Kettenbruche für $\sqrt{k}$, die Divisoren b, c, d ... h, i, l, und ihre Ergänzungen $\frac{B+\sqrt{k}}{B'}, \frac{C+\sqrt{k}}{C'}, \ldots \frac{F+\sqrt{k}}{F'}, \frac{G+\sqrt{k}}{G'}$ periodisch wiederkehren, so ist, wenn man die bisherige Bezeichnung beibehält, $b=m$, $c=n$, ... $l=2a$, ferner $B=H$, $B'=H'$, $C=J$, $C'=J'$ u. s. f. Es ist aber

nach (79) $A=0$, $A'=1$, $B=a$, $B'=k-a^2$, und nach den Gleichungen 67) ist

$C=B'b-B$, $C'=1+b(B-C)$, u. s. f.

$H=lG'-G$, $H'=F'+l(G-H)$, $J=mH'-H$,

$J'=G'+m(H-J)$; die letzte Gleichung gibt $G'=J'-m(H-J)=C'-b(B-C)=1$, und für diesen Werth von G' folgt $H=l-G=2a-G$, aber es ist $H=B=a$, mithin auch $G=a=B$; sonach hat die dem Endgliede einer Periode zugehörige Ergänzung 1 zum Nenner. Wegen $G=H$, folgt

$H'=F'=B'$, und eben so $E'=C'$, also

$k-F^2=F'E'=B'C'=k-C^2$, mithin $C=F$, und mittelst dieser Werthe von F' und F erhält man aus der Gleichung $G=iF'-F$, $i=b$, und auf gleiche Weise $h=c$, u. s. f. daher bilden die Nenner der Ergänzungen und die Divisoren einer Periode des für $\sqrt{k}$ ausfallenden Kettenbruches, von ihrem vorletzten Gliede an, hingegen die Zähler der Ergänzungen von ihrem letzten Gliede an, eine symetrische Reihe, oder es ist

$\sqrt{k}=a(b, c, d, \ldots d, c, b, 2a) \ldots 70)$.

Sei z. B. $k=19$, so ist $x=\sqrt{19}=4+$,

$x_1=\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2$, $x_2=\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1$, $x_3=\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3$,

$x_4=\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1$, $x_5=\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2$, $x_6=\frac{\sqrt{19}+4}{1}=8$,

also $\sqrt{19}=4$, (2, 1, 3, 1, 2, 8): eben so findet man

$\sqrt{61}=7$, (1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14).

90. Folgende Tafel gibt die Perioden von $\sqrt{k}$ für alle Werthe von k unter 81. Die nicht eingeklammerten Zahlen bedeuten halbe Perioden, wobei ein Komma vorkömmt, wenn sich das mittlere Glied wiederholt.

k	Per.	k	Per.	k	Periode	k	Periode	k	Periode	k	Periode
2	(2)	17	(8)	39	(2.10)	43	1.1.3.1.5	56	(2.14)	69	3.3.1.4
3	(1.2)	18	(4.8)	31	1.1.3.5	44	1.1.2	57	1.1.4	70	2.1.2
5	(4)	19	2.1.3	32	1.1	45	1.2.2	58	1.1.1,	71	2.2.1.7
6	(2.4)	20	(2.8)	33	1.2	46	1.3.1.1.2.6	59	1.2.7	72	(2.16)
7	1.1	21	1.1.2	34	1,4	47	(1.5.1.12)	60	1.2	73	1.1.5,
8	(1.4)	22	1.2.4	35	(1.10)	48	(1.12)	61	1.4.3.1.2,	74	1.1,
10	(6)	23	1.3	37	(12)	50	(14)	62	1.6	75	1.1 4
11	(3.6)	24	(1 8)	38	(6.12)	51	(7.14)	63	(1.14)	76	1.2.1.1.5.
12	(2.6)	26	(10)	39	(4.12)	52	4.1.2	65	(16)	77	1.3.2
13	1.1,	27	(5.10)	40	(3.12)	53	3.1	66	(8.16)	78	(1.4.1.16)
14	1.2	28	3.2	41	(2.2.12)	54	2.1.6	67	5.2.1.1.7	79	(1.7.1.16)
15	(1,6)	29	2,1	42	(2,12)	55	2 2	68	(4.16)	80	(1.16)

91. Setzt man in 68) $A=0$, $A'=1$, so erhält man $N^2 - kN'^2 = \pm J'$: vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung $z^2 - ky^2 = M$, so folgt $z = N$, $y = N'$, wenn die Zahlen J' und M der Größe und dem Vorzeichen nach übereinstimmen. Für $M = \pm 1$, ist J' der Nenner der dem Endgliede der Periode zugehörenden Ergänzung: wenn also die Periode eine gerade Anzahl Glieder enthält, so liefert jede derselben im Falle des oberen Zeichens eine Auflösung, im entgegengesetzten Falle gibt es keine ganzen Zahlen, welche der Gleichung Genüge leisten: wofern aber die Periode eine ungerade Anzahl Glieder hat, so geben die Näherungsbrüche, welche vor dem Endgliede der ersten, dritten, fünften, ... Periode einfallen, die Auflösungen der Gleichung $z^2 - ky^2 = -1$, hingegen bestimmen diejenigen Näherungsbrüche, welche vor dem Endgliede jeder geraden Periode zu stehen kommen, die Auflösungen der Gleichung $z^2 - ky^2 = +1$. Z. B. $z^2 - 14y^2 = \pm 1$ gibt $\sqrt{14} = 3\,(1, 2, 1, 6)$, und die Näherungsbrüche $\frac{1}{0}, \frac{15}{4}, \frac{449}{120}, \frac{13455}{3596}, \ldots$ liefern die Werthe von z und y, welche der Gleichung $z^2 - 14y^2 = +1$ Genüge leisten. Eben so findet man für $z^2 - 13y^2 = \pm 1$, $\sqrt{13} = 3\,(1, 1, 1, 1, 6)$, und die vor dem Endgliede der auf einander folgenden

Perioden einfallenden Näherungsbrüche sind $\frac{1}{0}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{649}{180}$, $\frac{23382}{6485}$, . . . mithin gilt für
$z^2 - 13y^2 = +1$, $z = 1, 649, \ldots$ $y = 0, 180, \ldots$
hingegen für $z^2 - 13y^2 = -1$, $z = 18, 23382, \ldots$ $y = 5, 6485, \ldots$

S. Anmerk. d. Die weitere Ausführung vorstehender Lehren findet man in den zwei klassischen Werken: Disquisitiones arithmeticae. Aut. C. F. Gauss. Lipsiae 1801, und Essai sur la théorie des nombres. Par A. M. Legendre. Paris 1808.

XI. Elimination der Gleichungen.

92. Es seien die Gleichungen des ersten Grades zwischen den unbekannten Größen x und y gegeben:
$ax + by = k$, $a_1x + b_1y = k_1$, man soll eine derselben aus diesen Gleichungen wegschaffen, so heißt das Verfahren die Elimination. Man multiplizire die erste Gleichung mit b_1, die andere mit b, und ziehe die Produkte von einander ab, so heben sich die mit y affizirten Glieder auf, und man erhält
$a_1bx - ab_1x = bk_1 - b_1k$: und eben so folgt, wenn man die erste Gleichung mit a_1, die andere mit a multiplizirt, und die Produkte von einander abziehet,
$a_1by - ab_1y = a_1k - ak_1$: man sieht, daß das eine Ergebniß aus dem andern abgeleitet werden kann, wenn man nur y statt x, und zugleich a, a_1 statt $-b$, $-b_1$ setzt. Man hat also aus den Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} ax + by = k \\ a_1x + b_1y = k_1 \end{matrix}\right\}; x = \frac{bk_1 - b_1k}{a_1b - ab_1}; y = \frac{a_1k - ak_1}{a_1b - ab_1} \quad \ldots \quad 71)$$

93. Um aus den Gleichungen: $ax + by + cz = k$
zwei der unbekannten Größen x, y, z $a_1x + b_1y + c_1z = k_1$
zu eliminiren; multiplizire man $a_2x + b_2y + c_2z = k_2$
die beiden ersten mit den willkührlichen Größen q, q_1,

und ziehe von der Summe dieser Produkte, die dritte Gl ichung ab: man erhält leicht,

$$(aq+a_1q_1-a_2)x+(bq+b_1q_1-b_2)y+(cq+c_1q_1-c_2)z = kq+k_1q_1-k_2$$

Wählt man nun q, q_1 so, daß hiedurch zwei der zu bestimmenden Größen z. B. y und z aus der Gleichung wegfallen, welches geschieht, wenn man $bq+b_1q_1=b_2$, $cq+c_1q_1=c_2$ setzt; so erhält man sogleich $x=\frac{kq+k_1q_1-k_2}{aq+a_1q_1-a_2}$. Aus den vorletzten Gleichungen findet man aber nach (92)

$$q=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1c-bc_1},\quad q_1=\frac{b_2c-bc_2}{b_1c-bc_2},$$

man bemerke nun, daß der Zähler von x aus dem Nenner abgeleitet werden kann, sobald man an die Stelle von a, a_1, a_2, beziehungsweise k, k_1, k_2 setzt; man braucht also die gefundenen Werthe von q, q_1 nur im Nenner von x zu substituiren, und durch Vertauschung des Buchstaben a mit k den Zähler hieraus zu bestimmen.

Nun ist $aq+a_1q_1-a_2=\frac{a(b_1c_2-b_2c_1)+a_1(b_1c-bc_2)}{b_1c-bc_1}-a_2$

oder wenn man diesen Nenner mit N bezeichnet,

$N=a(b_1c_2-b_2c_1)+a_1(b_2c-bc_2)+a_2(bc_1-b_1c)$,

nämlich

$N=ab_1c_2-ab_2c_1-a_1bc_2+a_1b_2c+a_2bc_1-a_2b_1c \ldots 72)$

bei dieser Anordnung folgen die Buchstaben in jedem Gliede alphabetisch auf einander, und wenn man die unten angeschriebenen Zahlen (Indizes) vergleicht, und bei jenen Buchstaben, wo keine solche Zahl steht, 0 zum Index annimmt, so ersieht man leicht, daß die Indizes gut geordnete Versetzungen (13) aus den Elementen 0, 1, 2 bilden: endlich erscheinen die Glieder paarweise mit demselben Zeichen behaftet.

94. Die Koeffizienten von x, y, und z entstehen aus einander durch Vertauschung der Buchstaben a, b, c: weil aber hiedurch der Nenner N, wie man sich aus 72) überzeugen kann, jedesmahl sein Vorzeichen ändern würde, so wird man aus dem gefundenen Ausdrucke von x, die Werthe von y und z schicklicher ableiten, wenn man im ersteren an die Stelle von a, a_1, a_2 beziehungsweise $-b$, $-b_1$, $-b_2$, ferner $-c$, $-c_1$, $-c_2$, und umgekehrt setzt, wobei der Ausdruck N als gemeinschaftlicher Nenner ungeändert bleibt. Gleichwie aber der Zähler von x aus dem Nenner N entsteht, wenn man k statt a setzt: eben so ergibt sich der Zähler von y und von z, indem man k statt b, c beziehungsweise substituirt. Hiernach geben obige Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Nx &= kb_1c_2 - kb_2c_1 - k_1bc_2 + k_1b_2c + k_2bc_1 - k_2b_1c \\ Ny &= ak_1c_2 - ak_2c_1 - a_1kc_2 + a_1k_2c + a_2kc_1 - a_2k_1c \\ Nz &= ab_1k_2 - ab_2k_1 - a_1bk_2 + a_1b_2k + a_2bk_1 - a_2b_1k \end{aligned}\right\} ..73)$$

95. Wendet man das hier Gesagte auf Gleichungen mit vier unbekannten Größen an, so ergibt sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} at + bx + cy + dz &= k \\ a_1t + b_1x + c_1y + d_1z &= k_1 \\ a_2t + b_2x + c_2y + d_2z &= k_2 \\ a_3t + b_3x + c_3y + d_3z &= k_3 \end{aligned}\right\}$$

der gemeinschaftliche Nenner N, wenn man im Beispiele (13) die um eine Einheit verminderten Elemente zu Indizes nimmt

$$\begin{aligned} N = {} & ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 - ab_2c_1d_3 + ab_2c_3d_1 + ab_3c_1d_2 \\ & - ab_3c_2d_1 - a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d \\ & - a_1b_3cd_2 + a_1b_3c_2d + a_2bc_1d_3 - a_2bc_3d_1 - a_2b_1cd_3 \\ & + a_2b_1c_3d + a_2b_3cd_1 - a_2b_3c_1d - a_3bc_1d_2 + a_3bc_2d_1 \\ & + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d - a_3b_2cd_1 + a_3b_2c_1d, \quad \ldots 74) \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Ausdrücke in welche sich N verwandelt, je nachdem man sämmtliche a, oder b, oder c, oder d in k umändert, durch A, B, C, D; so hat man

$$t=\frac{A}{N}, x=\frac{B}{N}, y=\frac{C}{N}, \text{ und } z=\frac{D}{N}.$$

Einen allgemeinen Beweis dieses Satzes findet man in Z. V. 209.

96. Man nennt eine Gleichung in Beziehung auf eine der in ihr enthaltenen unbekannten Größen geordnet, wenn die höchste Potenz derselben ohne Koeffizienten, und mit dem positiven Zeichen im ersten Gliede erscheint, und die folgenden Glieder die stuffenweise niedrigeren Potenzen enthalten. Eine geordnete Gleichung mit einer unbekannten Größe heißt des mten Grades, wenn das erste Glied derselben die mte Potenz der unbekannten Größe enthält: bei Gleichungen mit zweien oder mehreren unbekannten Größen, beurtheilt man den Grad nach der größten Summe der Exponenten sämmtlicher unbekannten Größen in einem Gliede.

Um aus zwei geordneten Gleichungen eines beliebigen Grades zwischen zwei unbekannten Größen, die eine derselben zu eliminiren, multiplizire man eine der beiden Gleichungen, bei ungleichen Graden die niedrigere, mit einem Faktor, wodurch ihre ersten Glieder einander gleich würden; ziehe hierauf die Produkte von einander ab, so erhält man eine Gleichung von einem niedrigeren Grade, als die höchste der beiden gegebenen Gleichungen: verwandelt man nun die andere derselben in eine Gleichung mit demselben Anfangsgliede als das letzte Ergebniß hat, so läßt sich aus diesen zwei Gleichungen das Anfangsglied wegschaffen, und man erhält eine Gleichung von einem noch niedrigeren Grade zum Resultat. Fährt man so fort, so gelangt man zuletzt auf eine Gleichung in welcher die Unbekannte gar nicht mehr vorkömmt.

Z. B. Um aus den Gleichungen $x^3+2y^2x-5xy+1=0 \ldots (a)$, $x^2-15xy+13y+3=0 \ldots (b)$, x weg zu schaffen, mul-

tiplizire man (b) mit x, und ziehe sie von (a) ab, so folgt $15x^2y+(2y^2-18y-3)x+1=0$ . . . (c): multiplizirt man nun (b) mit 15 y, und ziehet dieses von (c) ab, so erhält man,
$(227y^2-18y-3)x-195y^2-45y+1=0$ . . . (d),
multiplizirt man endlich diese mit x, und (b) mit $227y^2-18y-3$, und nimmt den Unterschied der Produkte, so gibt das Ergebniß nur noch eine Gleichung des ersten Grades, welche mit (d) verbunden eine Gleichung liefert, in welcher kein x mehr vorhanden ist.

Erstes Buch.

Methode der unbestimmten Koeffizienten.

I. Formen der Funktionen.

97. Größen, welche so von einander abhängen, daß mit der Veränderung einer derselben, auch die übrigen eine Veränderung erleiden, heißen Funktionen von einander. Die Abhängigkeit veränderlicher Größen von einander läßt sich durch eine Gleichung zwischen diesen und anderen bestimmten Größen ausdrücken. So erhellet aus der Gleichung $y = ax + \sqrt{(bx^2 + c)}$, wie y von x abhängt, welchen Werth nämlich y erhält, wenn der Größe x ein bestimmter Werth zugetheilt wird. Die in einer Gleichung vorkommenden bestimmten Größen nennt man beständige oder konstante Größen, und bezeichnet sie mit den ersten Buchstaben des Alphabets, während die veränderlichen Größen mit den letzten Buchstaben angedeutet werden.

98. Will man ganz allgemein anzeigen, daß y eine Funktion von x ist, so setzt man der letzteren Größe das Zeichen f, oder F, φ, ψ u. s. w. vor. Im obigen Beispiele, wäre $y = fx$, aber x ist eine andere Funktion von y, nämlich $x = Fy$, endlich ist die auf Null reduzirte Gleichung eine Funktion beider veränderlichen Größen, dieß gibt $\varphi(x, y) = 0$. Ertheilt man der veränderlichen Größe x einer Funktion fx, einen bestimmten

Werth a, so wird der hieraus entspringende Werth der Funktion durch fa angedeutet. Ist z. B.

$y=fx=\frac{c-bx}{a}$, so ist $fk=\frac{c-bk}{a}$, $f\frac{1}{b}=\frac{c*1}{a}$, und

$fo=\frac{c}{a}$. Ist ferner $y=Fx=\frac{2+5\cos x}{3}$, so ist

$$F(90°)=\tfrac{2}{3},\ F(180°)=-1,\ Fo=\tfrac{7}{3}.$$

99. Die Funktionen unterscheiden sich in zwei Hauptgattungen, nämlich in algebraische, und in transcendente. Man nennt eine Funktion algebraisch, wenn die veränderliche Größe derselben nur in arithmetischen Verbindungen vorkommt, also als Theil einer Summe oder Differenz, als Faktor im Nenner eines Bruchs, als Wurzel einer Potenz, oder unter einem Wurzelzeichen. Erscheint sie aber in nicht algebraischen Verbindungen etwa in einem goniometrischen Ausdrucke, als Sinus, Kosinus, Kreisbogen, ferner als Logarithme, oder als Exponent einer Potenz, so heißt die Funktion eine transcendente. Es versteht sich übrigens von selbst, daß die Verbindungen, in welchen die beständigen Größen vorkommen, auf die Gattung der Funktion, keinen Einfluß haben. So sind die Funktionen

$$y=ax+\frac{b}{cx}-\sqrt{(ax^2-b)},\quad y=x\,sin\,a-\log.\,b$$

algebraisch, dagegen die Funktionen

$$y=a\log.\,x,\quad y=a\,sin\,x,\quad y=e^x \text{ transcendent.}$$

100. Unter den algebraischen Funktionen unterscheidet man erstlich 3 verschiedene Arten von Funktionen, und zwar: ganze rationale, in welchen die veränderliche Größe, weder im Nenner eines Bruches noch unter einem Wurzelzeichen enthalten, und auch mit keinem negativen oder gebrochenen Exponenten versehen ist: gebrochene rationale wenn die Veränderliche weder

unter einem Wurzelzeichen vorkommt, noch einen gebrochenen Exponenten enthält, endlich irrationale wenn die Veränderliche entweder mit einem Wurzelzeichen behaftet ist, oder aber gebrochene Exponenten enthält.

101. Man unterscheidet ferner die algebraischen Funktionen in einförmige (eindeutige) und in vielförmige, (vieldeutige). Wenn für einen beliebigen Werth der veränderlichen Größe die Funktion bloß einen bestimmten Werth erhält, so heißt sie einförmig: wofern aber bei der Bestimmung der in einer Funktion vorkommenden veränderlichen Größe, mehrere Werthe der Gleichung Genüge leisten, so heißt die Funktion vielförmig, und unterscheidet sich nach der Anzahl dieser verschiedenen Werthe, in zweiförmige (zweideutige) dreiförmige, u. s. f. Funktionen.

102. Eine entwickelte Funktion, ist eine solche, in welcher die veränderliche Größe, auf welche die Funktion bezogen wird, in der Gleichung abgesondert erscheint, im Gegenfalle heißt die Funktion unentwickelt. Von den Funktionen z. B. $y = ax^2 - mx^2$, $ax^4 + bxy = cy^2$ ist die erste eine entwickelte, die andere eine unentwickelte.

Symmetrische Funktionen heißen diejenigen, in welchen die Größen so mit einander verbunden sind, daß keine Veränderung im Werthe der Funktion erfolgt, wenn man die Größen unter einander vertauscht. z. B. $x^m + y^m$, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, $xy + \sin x + \sin y$ u. s. f.

Aehnliche Funktionen sind solche, in welchen nur die veränderlichen Größen von einander verschieden sind, dagegen aber mit den beständigen Größen auf einerlei Weise verbunden erscheinen z. B.

$\frac{ax^2 - cx}{b + x}$ und $\frac{ay^2 - cy}{b + y}$. Solche Funktionen erhalten

auch die nämlichen Funktionszeichen; ist also $\frac{ax^2-cx}{b+x}=\psi x$, so ist auch $\frac{ay^2-cy}{b+y}=\psi y$ zu setzen.

103. Wenn man in den einzelnen Gliedern einer Funktion mehrerer veränderlichen Größen die Summe der Exponenten sämmtlicher veränderlichen Größen nimmt, so erhält man den Ordnungsexponent oder die Abmessung des Gliedes. Der höchste Ordnungsexponent der Glieder einer Funktion bestimmt die Ordnung oder den Grad der Funktion. Sind nun die Abmessungen sämmtlicher Glieder einer Funktion gleich, so heißt die Funktion gleichartig, im Gegenfalle ungleichartig.

104. Eine Funktion wird in Beziehung auf die in ihr enthaltene veränderliche Größe geordnet, wenn man erstlich die Glieder, in welchen gleiche Potenzen der veränderlichen Größe vorkommen, zusammenstellt und die veränderliche Größe als gemeinschaftlichen Faktor heraus hebt, hierauf aber die einzelnen Glieder der Funktion so auf einander folgen läßt, daß sie entweder mit der höchsten Potenz anfängt, und stuffenweise die nächst niedrigeren erhält, daher mit der niedrigsten Potenz der veränderlichen Größe endigt, oder aber umgekehrt mit der niedrigsten anfängt, und zu den nächst höheren Potenzen stuffenweise übergehend mit der höchsten sich endiget. Z. B. Die Funktion

$5ax^4-3bx^3+8cx^3+2dx^2-5ex^2+3gx^2$ geordnet, gibt $5ax^4+(8c-5e)x^3+(2d-3b-3g)x^2$ oder $(2d-3b-3g)x^2+(8c-5e)x^3+5ax^4$. Man kann jede geordnete ganze rationale Funktion einer veränderlichen Größe x des nten Grades durch die Form $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots Jx^4+Kx^3+Lx^2+Mx+N$, oder

auch durch durch $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots+Nx^n$ vorstellen, in welchen die Koeffizienten A, B, C, ... N die Größe x nicht enthalten, übrigens aber jede ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, auch eine unmögliche Zahl bedeuten können: gehen in einer geordneten Funktion einige Glieder ab, so sind die zugehörigen Koeffizienten derselben gleich Null zu setzen. Im obigen Beispiele wäre bei der ersten Anordnung, $A=o$, $B=o$, u. s. f. $J=5a$, $K=8c-5e$, $L=2d-3b-3g$, $M=o$, $N=o$, hingegen bei der zweiten Anordnung $A=o, B=o, C=2d-3b-3g, D=8c-5e, E=5a, N=o$

Beide Formen fallen in folgender noch allgemeineren zusammen $Ax^a+Bx^b+Cx^c+Dx^d+Ex^e+\ldots$, 75

Dann ist bei der ersten Anordnung

$A=5a$, $B=8c-5e$, $C=2d-3b-3g$, $D=\rho$, ferner der Exponent $a=4$, $b=3$, $c=2$, zu setzen.

105. Die allgemeine Form einer gebrochenen rationalen Funktion ist

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots}$$

wo a, b, c ... und α, β, γ ... beliebige Zahlen bedeuten können: setzt man $\frac{b}{a}=b'$, $\frac{c}{a}=c'$, $\frac{d}{a}=d'$ ...

und eben so $\frac{\beta}{\alpha}=\beta'$, $\frac{\gamma}{\alpha}=\gamma'$, $\frac{\delta}{\alpha}=\delta'$ u. s. f. so geht sie in $\frac{a}{\alpha}\left(\frac{1+b'x+c'x^2+d'x^3+\ldots}{1+\beta'x+\gamma'x^2+\delta'x^3+\ldots}\right)$ über,

und der hier eingeklammerte Bruch gibt, wenn man die durch denselben angedeutete Division wirklich vornimmt, zuerst 1 zum Quotienten, und

$(b'-\beta')x+(c'-\gamma')x^2+(d'-\delta')x^3+\ldots$ zum Rest, macht man zur Abkürzung

$b' - \beta' = b_1$, $c' - \gamma' = c_1$, $d' - \delta' = d_1$ ...
und setzt die Division fort, so erhält man $b_1 x$ zum zweiten Glied des Quotienten und
$(c_1 - b_1\beta')x^2 + (d_1 - b_1\gamma')x^3 + \ldots$ zum Rest, setzt man abermals $c_1 - b_1\beta' = c_2$, $d_1 - b_1\gamma' = d_2$, u. s. f. so wird $c_2 x^2$ das dritte Glied des Quotienten, und $(d_2 - c_2\beta')x^3 + \ldots$ der zugehörige Rest, u. s. f.; woraus hervorgeht, daß der gesuchte Quotient eine ohne Ende fortlaufende Reihe bildet, welche nach den Potenzen von x fortschreitet, nämlich

$$1 + b_1 x + c_2 x^2 + d_3 x^3 + \ldots$$

und welche mit $\frac{a}{\alpha}$ multiplizirt, eine Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ zum Produkte gibt; mithin ist in ihr unter der Voraussetzung, daß eine unbegrenzte Anzahl von Gliedern zugelassen werden muß, jede gebrochene Funktion enthalten.

106. Nimmt man eine wie immer große Anzahl $m+1$ von endlichen Größen $A, B, C, D \ldots K$ deren einige auch verneint sein können, und überdieß eine Zahl N, welche ohne Rücksicht auf das Zeichen, jede derselben einzeln genommen übertrifft, so ist für irgend eine positive Zahl p

$Np^2 > Bp^2$, $Np^3 > Cp^3$, $Np^4 > Dp^4 \ldots$ und allgemein $Np^{m+1} > Kp^{m+1}$ mithin

$$N(p^2 + p^3 + p^4 + \ldots + p^{m+1}) > Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots + Kp^{m+1}, \text{ oder}$$

$$\frac{Np^2(1-p^m)}{1-p} > Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots Kp^{m+1}$$

man nehme n so, daß $\frac{1}{n}(A+N) < A$ sei, so wird

$p = \frac{1}{n}$ gesetzt, $(A+N)p < A$, mithin $Np < A(1-p)$ und $\frac{Np^2}{1-p} < Ap$: da überdieß $1-p^m$ immer kleiner als 1 ist, so wird offenbar $\frac{Np^2(1-p^m)}{1-p} < Ap$, und daher $Ap > Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots + Kp^{m+1}$, oder wenn man beiderseits mit p dividirt,

$A > Bp + Cp^2 + Dp^3 + \ldots + Kp^m$; man kann sonach in einer jeden Funktion von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ der veränderlichen Größe x immer einen so kleinen Werth beilegen, daß dann ihr erstes Glied die Summe aller folgenden übersteigt.

107. Wenn eine Funktion $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = o$ bei einer unbegrenzten Anzahl von Gliedern für jeden möglichen Werth der veränderlichen Größe x gleich Null ist, so hat man allemahl

$$a = -(bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)$$

nimmt man nun für x einen so kleinen Werth p, daß für ihn, und jeden noch kleineren Werth, das erste Glied bx größer wird, als die Summe aller folgenden, daß mithin $bp > cp^2 + dp^3 + \ldots$ daher

$$2bp > bp + cp^2 + dp^3 + \ldots$$

so wird $a < -2bp$, für alle Werthe welche die Größe p nicht übersteigen, d. i. es muß $a = o$ sein, mithin auch $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = o$, dividirt man nun die Gleichung mit x, so erhält man $b + cx + dx^2 + \ldots = o$, und es ist folglich aus demselben Grunde auch $b = o$, und daher ist auch jeder andere Koeffizient gleich Null; wenn also eine ge-

ordnete ganze rationale Funktion für jeden möglichen Werth der veränderlichen Größe gleich Null ist, so müssen sämmtliche Koeffizienten, jeder für sich, null sein.

108. Sind daher zwei Funktionen derselben veränderlichen Größe

$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots = a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$

für jeden möglichen Werth von x einander gleich, so wird wenn man die Gleichung auf Null bringt

$A-a+(B-b)x+(C-c)x^2+(D-d)x^3+\ldots = o$

daher nach (107)

$A-a=o$, $B-b=o$, $C-c=o$, $D-d=o$ oder

$A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$ u. s. f.

109. Hierauf beruhet eine allgemeine Methode, Reihen aufzusuchen, welche gewisse Eigenschaften haben sollen, wodurch die Form der Reihen bereits gegeben ist, also nur noch vorläufig die mit A, B, C, D ... bezeichneten Koeffizienten derselben so zu bestimmen sind, daß sie den Bedingungen der Aufgabe genügen — man nennt sie Methode der unbestimmten Koeffizienten. Z. B. Um $\frac{1+2x}{3-x+5x^2}$ in eine Reihe zu verwandeln, setze man

$$\frac{1+2x}{3-x+5x^2} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$$

multiplizirt man beiderseits mit $3-x+5x^2$ und ordnet das Produkt nach den Potenzen von x, so erhält man

$$1+2x = 3A+3B\}x+3C\}x^2+3D\}x^3+3E\}x^4+\ldots$$
$$\quad -A\} \quad -B\} \quad -C\} \quad -D\}$$
$$\quad +5A \quad +5B \quad +5C$$

dieß gibt die Gleichungen

$$3A = 1,$$
$$3B - A = 2$$
$$3C - B + 5A = 0$$
$$3D - C + 5B = 0$$
$$3E - D + 5C = 0$$

und hieraus folgt $A = \frac{1}{3}$

$3B = 2 + A = \frac{7}{3}$, $B = \frac{7}{9}$

$3C = -5A + B = \frac{7}{9} - \frac{5}{3} = -\frac{8}{9}$, $C = -\frac{8}{27}$

$3D = C - 5B = -\frac{8}{27} - \frac{35}{9} = -\frac{113}{27}$, $D = -\frac{113}{81}$

u. s. f. es ist also, wenn man statt A, B, C ... ihre Werthe setzt

$$\frac{1 + 2x}{3 - x + 5x^2} = \frac{1}{3} + \frac{7}{9}x - \frac{8}{27}x^2 - \frac{113}{81}x^3 - \ldots$$

II. Kennzeichen konvergirender Reihen.

110. Eine jede Zahl, so groß sie auch sein mag, ist doch immer einer Vergrößerung fähig, sie kann, nämlich durch Hinzufügung gleichartiger Einheiten fortwährend zunehmen; wenn nun diese Vergrößerungen bei einer und derselben Zahl, unaufhörlich angenommen werden, so wird sie nach und nach größer, als jede denkbare noch so große Zahl: man sagt dann, sie wachse unendlich, oder sie werde unendlich groß, und bezeichnet sie mit ∞: welches Symbol daher jede unendlich groß werdende Zahl, oder kürzer jede unendliche Größe vorstellt. Wenn hingegen eine Zahl durch Hinwegnahme ihrer Theile so vermindert wird, daß sie kleiner wird, als jede noch so kleine angebbare Zahl, so sagt man, sie nehme unendlich ab, oder sie werde unendlich klein, und bezeichnet sie mit $\frac{a}{\infty}$, wo a jede beliebige endliche Zahl bedeutet.

111. Da eine unendliche Zahl als die Grenze aller Vergrößerungen betrachtet wird; so ist schon jede endliche Vergrößerung in ihrem Begriffe mitenthalten, mithin kann sie durch das Hinzufügen oder durch die Hinwegnahme einer endlichen Zahl, deren Werth angebbar ist, keine Aenderung ihres Werthes erleiden: welches symbolisch ausgedrückt, gibt $\infty \pm a = \infty$, und $a\infty \pm b = a\infty$, woraus so fort folgt $a \pm \frac{b}{\infty} =$ [illegible] oder wie man sich auszudrücken pflegt: jede endliche Zahl verschwindet bei der Addition oder Subtraktion gegen eine unendliche Zahl: und eben so verschwindet jede unendlich kleine gegen eine endliche Größe.

112. Dagegen kann eine unendliche Zahl in ihrem Werthe mannichfache Aenderungen erleiden, wenn die Vergrößerungen Einheiten ihrer Art, nämlich, unendlich groß sind: denn hat man einmahl den Begriff ∞ als zulässig erkannt, so hindert nichts zwei oder mehrere derselben durch $+$ und $-$ Zeichen nach den gewöhnlichen Regeln der Addition oder Subtraktion in ein einziges Ergebniß $a\infty$ zu vereinigen, wo a positiv, negativ oder auch Null sein kann. Sind nun A, B zwei unendlich große Zahlen $A = ma$, $B = mb$, wobei $m = \infty$ ist, so gestatten sie unter einander eine Vergleichung, und ihr Verhältniß zu einander ist stets wie a: b. Eben so haben unendlich kleine Größen zu einander ein angebbares Verhältniß.

113. Auch höhere Potenzen von unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen enthalten keinen Widerspruch: denn da im Ausdrucke $m\infty$, der Faktor m jeden beliebigen Werth haben darf, so kann man m selbst ∞ setzen, wodurch dann $m\infty$ in ∞^2, und $m\infty^2$ in ∞^3.

u. s. f. übergeht: und auf gleiche Weise folgt aus $\frac{am}{\infty}$, für $m = \frac{1}{\infty}$, die Größe $\frac{a}{\infty^2}$, und unter derselben Voraussetzung folgt aus $\frac{ma}{\infty^2}$ die Größe $\frac{a}{\infty^3}$, u. s. f. Werden aber unendliche Größen verschiedener Ordnungen durch Addition oder Subtraktion mit einander verbunden, so ist das Ergebniß scheinbar paradox: ist nämlich $A = a\infty^m$, $B = b\infty^n$, und $m > n$, so wird $A \pm B = a\infty^m \pm b\infty^n = \infty^{m-n}(a\infty^n \pm b)$, wo der eingeklammerte Faktor nach (111) in $a\infty^n$ übergeht, mithin hat man $a\infty^m \pm b\infty^n = \infty^{m-n}.a\infty^n = a\infty^m$: dagegen ist $\frac{a}{\infty^{m-n}} \pm \frac{b}{\infty^m} = \frac{a\infty^n \pm b}{\infty^m} = \frac{a\infty^n}{\infty^m} = \frac{a}{\infty^{m-n}}$, welche Sätze man gewöhnlich so ausdrückt: jede unendliche Größe einer niedrigeren Ordnung verschwindet bei der Addition oder Subtraktion gegen eine unendliche Größe einer höheren Ordnung, und eben so verschwindet eine unendlich kleine Größe einer höheren Ordnung gegen eine unendlich kleine Größe einer niedrigeren Ordnung.

114. Wenn eine Funktion y bei den verschiedenen Werthen, welche sie anzunehmen vermag, sich einer unveränderlichen Größe a so nähert, daß der Unterschied zwischen ihnen unendlich klein werden kann, so heißt a die Grenze von y, welches man so bezeichnet: $a = lim.\, y$. Z. B. Die Funktion $y = \frac{5+3x}{7+4x}$ hat, wenn x unendlich abnimmt, den Bruch $\frac{5}{7}$ zur Grenze, wenn hingegen x unendlich zunimmt $\frac{3}{4}$ zur Grenze. Ist nun ω eine unendlich klein werdende Größe, so hat

man $y = a \pm \omega$, oder *lim.* y statt a gesetzt, $y = lim.y \pm \omega$. Aus einem ähnlichen Grunde erhält man für eine Funktion z, und irgend eine andere unendlich klein werdende Größe ν, die Gleichung $z = lim.z \pm \nu$; sonach $y \pm z = lim.y \pm lim.z \pm (\omega \mp \nu)$: aber $\omega + \nu$ bedeutet ebenfalls eine unendlich klein werdende Größe, daher nähert sich $y \pm z$ ohne Ende der Summe $lim.y \pm lim.z$, und es ist, nach dem aufgestellten Begriffe einer Grenze, $lim.(y \pm z) = lim.y \pm lim.z$. Behält man hier das untere Zeichen bei, und setzt $y = z$, so folgt $0 = lim.y - lim.z$, oder $lim.y = lim.z$ d. i. sind zwei Funktionen in jedem ihrer Zustände einander gleich, so haben sie auch gleiche Grenzen.

115. Aus denselben Gleichungen $y = lim.y + \omega$, $z = lim.z + \nu$ folgt noch:
$yz = lim.y.lim.z + \nu\, lim.y + \omega\, lim.z + \omega\nu$, wobei die Summe $\nu\, lim.y + \omega\, lim.z$ mit ω und ν unendlich klein wird, daher $lim.yz = lim\, y.lim.z$ . . . und 76) eben so, für eine beliebige Anzahl von Funktionen y, z, u . . ., ist $lim.(yzu..) = lim.y.lim.z.lim.u...$
Ferner ist $\frac{z}{y} = \frac{lim.z + \nu}{lim.y + \omega} = \frac{lim.z}{lim.y} - \frac{\nu\, lim.y - \omega\, lim.z}{(lim.y + \omega)lim.y}$
wobei der Zähler des Bruches unendlich klein werden kann, während der Nenner sich dem Quadrate von *lim.* y ohne Ende nähert, man hat also $lim.\frac{z}{y} = \frac{lim.z}{lim.y}$. 77)

Setzt man die Funktionen y, z, u . . . einander gleich, so folgt für jede ganze positive Zahl m, $lim.y^m = (lim.y)^m$, wofern aber $m = \frac{p}{q}$ eine gebrochene Zahl bedeutet, und man setzt $y^{\frac{p}{q}} = z$, so hat man $lim.y^{\frac{p}{q}} = lim.z$, also $lim.y^p = (lim.z)^q$, und beiderseits die Wurzel q

gezogen, $(lim.y^p)^{\frac{1}{q}} = lim.z = lim.y^{\frac{p}{q}}$: es ist aber $lim.y^p = (lim.y)^p$ folglich $(lim.y^p)^{\frac{1}{q}} = (lim.y)^{\frac{p}{q}}$, und $lim.y^{\frac{p}{q}} = (lim.y)^{\frac{p}{q}}$: ist endlich $m = n$ eine negative Zahl, so hat man $\frac{1}{lim.y^n} = \frac{1}{(lim.y)^n} = (lim.y)^{-n}$, andererseits aber ist $\frac{1}{lim.y^n} = \frac{lim.1}{lim.y^n} = lim.\left(\frac{1}{y^n}\right) = lim.y^{-n}$, folglich auch $lim.y^{-n} = (lim\,y.)^{-n}$; daher ist allgemein

$lim.y^m = (lim.y)^m$ . . . 78)

116. Wenn mehrere auf einander folgenden Größen nach irgend einem gemeinschaftlichen Gesetze fortschreiten, so bilden sie eine Reihe, deren Glieder diese Größen sind. Die Stellen, welche die Glieder einer Reihe einnehmen, werden mit den natürlichen Zahlen bezeichnet, und dem das Glied vorstellenden Buchstaben rechts unten angeschrieben, man nennt eine solche Zahl die Stellenzahl oder den Index des Gliedes. Auf diese Weise bedeutet $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots$ jede beliebige Reihe. Besteht die Reihe aus einer beliebigen Anzahl von Gliedern, so heißt sie endlich, wenn aber ihre Glieder ohne Ende fortlaufen, eine unendliche Reihe, z. B. die binomische Reihe, wenn der Exponent keine ganze positive Zahl ist, (26).

117. Das Fortschreitungsgesetz einer Reihe läßt sich auf eine zweifache Art darstellen: entweder wird jedes Glied der Reihe, wie a_{n+1}, durch die ihm vorangehenden Glieder $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ ausgedrückt, da dann die Reihe eine rekurrente Reihe genannt wird: oder aber ein Glied, wie a_n, ist bloß eine Funktion des Index n, und es kann sonach jedes Glied a_r

unabhängig von andern Gliedern der Reihe gefunden werden, wenn man nur im Ausdrucke für a_n, überall r statt n setzt: man nennt eine solche Form des allgemeinen Gliedes (21) eine independente: z. B. in der rekurrenten Reihe 1, 4, 14, 46, 146, 454, . . . wird jedes Glied gebildet, wenn man die zwei vorangehenden beziehungsweise mit 5 und 6 multiplizirt, und die Produkte von einander abziehet: auf diese Art ist $146 = 5.46 - 6.14$, u. s. f.

118. Wenn die Summe einer unendlichen Reihe so beschaffen ist, daß sie sich einer bestimmten Grenze G desto mehr nähert, je mehr Glieder man zusammenzählt, so heißt die Reihe eine konvergirende, und G ist ihre Summe: im Gegentheile heißt eine unendliche Reihe, eine divergirende, wenn ihre Summe entweder unendlich groß ist, oder aber eine Grenze hat, die zwischen mehreren Werthen schwankt. Stellt man die Summe der n Anfangsglieder einer unendlichen Reihe durch S_n, und die aller übrigen Glieder durch E vor, so heißt E ihre Ergänzung; es wird daher zur Konvergenz einer Reihe erfordert, daß beim unendlichen Wachsen von n, ihre Ergänzung unendlich klein wird.

119. Die Formel 34) gibt, je nachdem man $q > 1$, $q < 1$ annimmt,

$$S_n = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}, \text{ und } S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Im ersten Falle wächst das erste Glied des Ausdrucks mit n, und kann unendlich groß werden, oder aber, wenn man $q = -1$ setzt, so erhält man für die Summe der Reihe $a - a + a - a + \ldots$ den Ausdruck $\frac{1}{2}a(\pm 1 - 1)$, welcher zwischen o und a schwankt: im andern Falle, wenn

nämlich $q < 1$ ist, gibt das erste Glied $\frac{a}{1-q}$ die Grenze, der sich die Summe S_n ohne Ende nähert; woraus folgt, daß eine unendliche geometrische Reihe, deren Quotient nicht kleiner als die Einheit ist, eine divergirende Reihe bildet, während dieselbe bei einem Quotienten unter 1, desto mehr konvergirt, je kleiner der Quotient selbst ist.

120. Wenn die Glieder einer Reihe von einer gewissen Stelle angefangen, sämmtlich kleiner sind, als die korrespondirenden Glieder einer andern konvergirenden Reihe, so ist gewiß, von dieser Stelle an, die Ergänzung der ersten Reihe kleiner, als die der anderen Reihe; allein diese wird beim unendlichen Wachsen von n unendlich klein (118), mithin auch jene, d. i. die vorgelegte Reihe konvergirt ebenfalls: und umgekehrt eine jede Reihe ist eine divergirende, wenn ihre Glieder sämmtlich größer sind, als die zugehörigen Glieder einer divergirenden Reihe. Sind also die Glieder einer Reihe so beschaffen, daß der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sich einer bestimmten Grenze A ohne Ende nähert, und man hat $lim.\frac{a_{n+1}}{a_n} = A$, so muß $\frac{a_{n+1}}{a_n} - A$, sobald n eine hinreichend große Zahl r übersteigt, fortwährend kleiner werden als $B - A$, woraus $\frac{a_{r+1}}{a_r} < B$, oder $a_{r+1} < Ba_r$ folgt; man hat daher $a_{r+2} < Ba_{r+1} < B^2 a_r$, und eben so $a_{r+3} < B^3 a_r$ u. s. f. mithin werden die Glieder der Reihe $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, a_{r+3}, \ldots$ sämmtlich kleiner, als

die gleichnahmigen Glieder der geometrischen Reihe a_r, Ba_r, B^2a_r, B^3a_r, ... Ist nun $A<1$, so kann man auch $B<1$ nehmen, und dann ist obige Reihe vom Gliede a_r an, eine konvergirende; das Gegentheil findet Statt, wenn $A>1$ ausfällt; demnach konvergirt oder divergirt eine jede Reihe, je nachdem die Grenze, welcher sich der Quotient, aus einem Gliede durch das nächst vorangehende, ohne Ende nähert, kleiner oder größer als die Einheit ist. Eine weitere Ausführung der Kennzeichen konvergirender Reihen findet man im V. I. 24 *)

III. Exponential- und logarithmische Funktionen.

121. Man nennt eine Exponentialgröße, jede Potenz, deren Exponent eine veränderliche Größe ist: ihre einfachste Form ist a^x, wo a ihre Grundzahl (Basis) heißt. Man setze $a=1+y$, so gibt die Formel 19)

$$(1+y)^x = 1 + xy + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}y^2 + \ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}y^n \ldots \alpha)$$

Ordnet man diese Reihe nach den Potenzen von x, so ist klar, daß das von x freie Glied $=1$ ist, bezeichnet man noch die Koeffizienten der auf einander folgenden Potenzen von x mit A, B, C ... M, N, so erhält man

*) Dieses Citat bedeutet: Vorlesungen über die höhere Mathematik. Vom Prof. And. v. Ettingshausen. Band I. Wien 1827. Seite 24 u. d. f.

$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots Mx^{n-1} + Nx^n + \ldots \beta)$
es ist aber nach 12) das von x freie Glied im Produkte $(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ gleich dem Produkte der $n-1$ Elemente $1, 2, 3 \ldots n-1$; mithin folgt aus dem allgemeinen Gliede der Reihe α) der Koeffizient von x gleich $\pm \frac{1}{n} y^n$, und wenn man hier statt n nach und nach $1, 2, 3 \ldots$ substituirt, erhält man die Koeffizienten von x aus dem ersten, zweiten, dritten, ... Gliede der Reihe α), welche zusammengenommen, den Werth, von

$A = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \ldots \pm \frac{1}{n} y^n \ldots \gamma)$ geben.
Um nun noch die übrigen Koeffizienten B, C, ... N der Reihe β) zu bestimmen, sei $t = x + z$, also $a^t = a^x . a^z$; man hat aber der in β) angenommenen Form gemäß

$a^{x+z} = 1 + A(x+z) + B(x+z)^2 + \ldots + N(x+z)^n$

$a^z = 1 + Az + Bz^2 + \ldots Nz^n$, daher

$1 + A(x+z) + B(x+z)^2 + \ldots N(x+z)^n$
$= a^x [1 + Az + Bz^2 + \ldots + Nz^n].$

Entwickelt man nun das erste Glied dieser Gleichung, und ordnet nach den Potenzen von z, so folgt

$1 + Ax + Bx^2 + \ldots Nx^n$
$+ z[A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots + nNx^{n-1}] + \alpha z^2 + \beta z^3 + \ldots$
$= a^x + Aa^x z + Ba^x z^2 + \ldots$, und wenn man nach (108) die Koeffizienten von z einander gleich setzt, wird

$A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots + nNx^{n-1} = Aa^x$
$= A + A^2 x + ABx^2 + \ldots + AMx^{n-1} \ldots$

wo nun wieder die einzelnen Koeffizienten gleicher Potenzen von x einander gleich sein müssen, so daß man die Gleichungen hat:

$2B = A^2$ woraus $B = \frac{1}{2}A^2$
$3C = AB$ $C = \frac{1}{3}AB = A^3 : 3!$
$4D = AC$ $D = \frac{1}{4}AC = A^4 : 4!$
. . . . . und allgemein
$nN = AM$ $N = \frac{1}{n}AM = A^n : n!$ folgt; man erhält also

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \frac{A^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{A^nx^n}{n!} \ldots \quad 79)$$

122. Setzt man in diesem Ausdrucke $x = 1$, so folgt

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} \ldots \delta)$$ Die Gleichungen $\gamma)$ und $\delta)$ geben die Abhängigkeit der Größen a und A von einander zu erkennen: wenn nämlich die Grundzahl a bekannt ist, so hat man auch $y = a - 1$, und hieraus mittelst der Gleichung $\gamma)$ die Größe A, und umgekehrt findet man mittelst der Gleichung $\delta)$ aus dem bekannten Werthe von A den zugehörigen Werth der Grundzahl. Am einfachsten ist es $A = 1$ anzunehmen, bezeichnet man dann den zugehörigen Werth von a mit e, so folgt $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$, wo jedes Glied aus dem vorhergehenden gefunden wird, wenn man dieses nach und nach durch die natürlichen Zahlen 1, 2, 3... dividirt: die Rechnung gibt $e = 2{,}718281828459 \ldots$, und der Formel 79) gemäß ist nun

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots \quad 80)$$

123. Für $Ax = 1$, folgt aus 79) die Gleichung $a^x = e$, oder wenn man beiderseits Logarithmen nimmt,
$x \log. a = \log. e$, d. i. $\log. a = A \log. e$: nun war $a = 1 + y$, daher wird wenn man statt A seinen Werth $\gamma)$ substituirt,
$\log.(1 + y) = \log. e\,(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots)$.
Beziehen sich aber die Logarithmen auf die Grundzahl a,

dann ist bekanntlich $\log. a = 1$, wodurch man

$\log. e = \frac{1}{A} = M$ erhält: setzt man diesen Werth statt $\log. e$ in die letzte Gleichung so wird

$$\log.(1+y) = M(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \ldots) \quad 81)$$

welche Reihe konvergirt, sobald $y < 1$ ist.

Addirt man aber beiderseits $\log. h$, und setzt $hy = z$, so folgt

$$\log.(h+z) = \log. h + M\left(\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2} + \frac{z^3}{3h^3} - \ldots\right) \quad 82),$$

und diese Reihe gibt den Logarithmus einer Zahl $h + z$, wenn der Logarithme von h bekannt, und $h < z$ ist.

124. Um die Reihe 81) schneller konvergirend zu machen, setze man erstlich $-y$ statt y, so ergibt sich $\log.(1-y) = -M(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \ldots)$, folglich durch Subtraktion dieser Gleichung von 81)

$$\log.\frac{1+y}{1-y} = 2M(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \ldots) \quad 83)$$

Setzt man hier $\frac{1+y}{1-y} = \frac{z}{z-1}$, woraus $y = \frac{1}{2z-1}$ folgt, so hat man $\log. z =$

$$\log.(z-1) + 2M\left(\frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3(2z-1)^3} + \frac{1}{5(2z-1)^5} + \ldots\right) \quad 84)$$

ist endlich $z = x^2$, also $z - 1 = (x+1)(x-1)$, und $\log. z = 2\log. x$, so erhält man

$$\log. x = \frac{\log.(x+1) + \log.(x-1)}{2}$$

$$+ M\left(\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \frac{1}{5(2x^2-1)^5} + \ldots\right) \quad 85)$$

mittelst welcher Reihe man den Logarithmus einer jeden Primzahl leicht bestimmen kann.

125. Man setze zur Abkürzung

$M\left(\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \ldots\right) = P_x$, so findet

man für $x = 2$, und $x = 3$

$\log.2 = \frac{1}{2}\log.3 + P_2$, $\log.3 = \frac{2}{3}\log.2 + P_3$, folglich

$\log.2 = 2(2P_2 + P_3)$, $\log.3 = 2(3P_2 + 2P_3)$, wobei die Zahlen P_2, und P_3 sich mit Hülfe der Reihen

$$P_2 = M\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \ldots\right)$$

$$P_3 = M\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \ldots\right)$$

ohne große Mühe berechnen lassen.

Sind die Logarithmen von 2 und 3 gefunden, so ergibt sich mittelst der Reihe 85)

$\log.5 = \frac{1}{2}(\log.6 + \log.4) + P_5 = \frac{1}{2}(\log.3 + 3\log.2) + P_5$

$\log.7 = \frac{1}{2}(\log.8 + \log.6) + P_7 = 2\log.2 + \frac{1}{2}\log.3 + P_7$

$\log.11 = \frac{1}{2}(\log.12 + \log.10) + P_{11} = \frac{5}{2}\log.2$

$+ \frac{1}{2}(\log.3 + \log.5) + P_{11}$ u. s. f.

Die Logarithmen der Primzahlen über 11 hinaus, ergeben sich schon, wenn man nur 7 Dezimalstellen haben will, mittelst der Formel

$$\log.x = \frac{\log.(x+1) + \log.(x-1)}{2} + \frac{M}{2x^2-1}$$

und die Logarithmen derjenigen Primzahlen, welche 2237 überschreiten, aus der Formel

$$\log.x = \tfrac{1}{2}[\log.(x+1) + \log.(x-1)]$$

126. Da e die Basis des logarithmischen Systems ist, in welchem $A = 1$ gewählt wurde, so heißen die zugehörigen Logarithmen *natürliche Logarithmen*, und wir werden sie in der Folge immer mit dem Buchstaben λ bezeichnen, während die *briggischen Logarithmen* welche sich auf die Grundzahl $a = 10$ beziehen, durch den Buchstaben l unterschieden werden sollen.

Bei den natürlichen Logarithmen ist also $M = \frac{1}{A} = 1$:

bei den briggischen Logarithmen aber, findet man M,

wenn man in der Formel 83) $\frac{1+y}{1-y} = 10$ setzt, hiedurch wird $y = \frac{9}{11}$, und

$$M = \frac{1}{2(\frac{9}{11} + \frac{1}{3}(\frac{9}{11})^3 + \frac{1}{5}(\frac{9}{11})^5 + \dots)} = 0{,}4342944819\dots$$

man nennt diese Zahl den Modulus des briggischen Systems. Hiernach ist, wenn man $\lambda N = n$ setzt, $lN = Mn$, und umgekehrt $\frac{lN}{M} = n = \lambda N$: d. i. man findet aus dem natürlichen Logarithmus einer Zahl, ihren briggischen Logarithmus, wenn man jenen mit dem Modulus multiplizirt, und umgekehrt aus dem briggischen Logarithmus den natürlichen, wenn man den erstern mit dem Modulus dividirt, oder aber, welches einfacher ist, durch den Faktor $\frac{1}{M} = 2{,}30258509299\dots$ multiplizirt.

IV. Goniometrische Hauptfunktionen.

127. Seien $Fx = p$, und $fx = q$ zwei Funktionen von x die von einander so abhängen, daß beständig die Relation $p^2 + q^2 = 1 \dots \alpha)$ Statt habe, man soll die allgemeine Art, wie sie aus x zusammengesetzt sind, unter der Bedingung bestimmen, daß beide für jeden beliebigen Werth von x mögliche Werthe erhalten? Die Gleichung $\alpha)$ gibt sofort

$$p = \pm\sqrt{(1-q^2)},\ q = \pm\sqrt{(1-p^2)}$$

es darf also keine derselben größer als 1, oder kleiner als -1 werden: hat man aber eine der Funktionen zwischen diesen Grenzen willkührlich angenommen, so ist die andere zwar der Größe, aber nicht dem Vorzeichen nach, bestimmt. Um diese Zweideutigkeit zu heben,

nehme man an, es sei $p = o$, für $x = o$, und von da an, sei p für ein positives Wachsen von x positiv, hingegen, für ein negatives Wachsen, negativ: dann ist $q = \pm 1$, für $x = o$, und um auch hier keine Zweideutigkeit zu lassen, setze man fest, es sei für $x = o$, $q = +1$. Die Funktion p wird nun mit x zunehmen, bis sie nicht den größten Werth $+1$ erreicht hat, und hierauf nach dem Gesetze der Stetigkeit für noch größere Werthe von x wieder abnehmen, und abermals in Null übergehen: geschieht dieß für einen Werth $x = \pi$, oder ist $F\pi = o$, so kann man leicht übersehen, daß ihr größter Werth der Mitte zwischen $x = o$, und $x = \pi$ zugehören wird, man hat daher $F\frac{1}{2}\pi = +1$. Für Werthe von x, welche π übersteigen, muß nun p, dem Gesetze der Stetigkeit gemäß, negativ werden, und immer fort abnehmen, bis sie die Grenze -1 erreicht hat: offenbar ist es der Fall, wenn x abermals um $\frac{1}{2}\pi$ zugenommen hat, nämlich für $x = \frac{3}{2}\pi$; man hat dann $F\frac{3}{2}\pi = -1$, und da sie schon nicht kleiner werden darf, so wird sie für Werthe von x, die $\frac{3}{2}\pi$ überschreiten, wieder zunehmen, und in Null übergehen wenn $x = 2\pi$ geworden ist. Wächst x über 2π hinaus, so erfolgen die Aenderungen der Funktion p wieder in derselben Ordnung, wie sie von $x = o$ bis $x = 2\pi$, Statt gehabt haben, so daß sich dieselben in gleichen Intervallen je 2π periodisch wiederholen. Für ein negatives Wachsen von x ändert die Funktion ihr Zeichen, und wird stets negativ, wenn sie für einen gleichen positiven Werth von x positiv war, und umgekehrt.

128. Erwägt man aber mittelst der Gleichung α) die den in gleichen Intervallen $\frac{1}{2}\pi$ auf einander folgenden Werthen von x, zugehörigen Werthe der Funktion q, so findet man leicht, daß q von $+1$ an, nach einander in o, -1, o und $+1$ übergehen wird, wenn x

positiv wächst, und umgekehrt von -1 an sich in $0, +1, 0$ und -1 verwandelt, wenn x negativ zunimmt. Stellt man diese Werthe beider Funktionen zusammen, so hat man für

$$\begin{array}{lccccccc} x = & 0 & \frac{1}{2}\pi & \pi & \frac{3}{2}\pi & 2\pi & \frac{5}{2}\pi & 3\pi \ldots \\ p = & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ q = & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & -1, \end{array}$$

hingegen für

$$\begin{array}{lccccccc} x = & 0 & -\frac{1}{2}\pi & -\pi & -\frac{3}{2}\pi & -2\pi & -\frac{5}{2}\pi & -3\pi \ldots \\ p = & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ q = & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & -1 \end{array}$$

woraus hervorgeht, daß für gleiche positive und negative Werthe von x, die Funktion q gleiche, hingegen p entgegengesetzte Vorzeichen erhalte: welches charakteristische Unterscheidungszeichen beider Funktionen man so ausdrückt:

$$f(-x) = fx, \text{ und } F(-x) = -Fx \ldots \beta)$$

129. Setzt man x_1 statt x, also $p_1 = Fx_1, q_1 = fx_1$ so hat man der Gleichung $\alpha)$ gemäß $p_1^2 + q_1^2 = 1$; daher $(p^2 + q^2)(p_1^2 + q_1^2) = 1$, oder

$p^2p_1^2 + p^2q_1^2 + p_1^2q^2 + q^2q_1^2 = 1$ addirt man beiderseits $\pm 2pq_1\, p_1q \mp 2qq_1\, pp_1 = 0$

so kann man das Ergebniß so schreiben:

$$p^2q_1^2 \pm 2pq_1p_1q + p_1^2q^2 + q^2q_1^2 \pm 2qq_1pp_1 + p^2p_1^2 = 1,$$

oder $(pq_1 \pm p_1q)^2 + (qq_1 \mp pp_1)^2 = 1 \ldots \gamma)$

Wenn nun die oberen Zeichen gelten, so wird vermög der Gleichungen $\beta)$ für $x_1 = -x$, die Funktion $p_1 = -p$, hingegen $q_1 = q$, hiedurch geht das erste Glied des Ausdrucks $\gamma)$ in Null, das zweite Glied in 1 über: aber die Voraussetzung $x_1 = -x$, gibt $x_1 + x = 0$, und nach (127) verschwindet nur die mit F bezeichnete Funktion mit der veränderlichen Größe zugleich, während die unter f vorgestellte Funktion $+1$ beträgt, man hat

daher $pq_1 + p_1q = F(x + x_1)$, und $qq_1 - pp_1 = f(x + x_1)$. Gelten aber die unteren Zeichen, so ergibt sich für $x_1 = x$, das erste Glied der Gleichung γ) abermahls gleich Null, das andere Glied $= 1$, und da dann $x - x_1 = 0$ ist, so bedeutet $pq_1 - p_1q$ die Funktion $F(x - x_1)$, und $qq_1 - pp_1$ die Funktion $f(x - x_1)$. Man hat sonach allgemein, wenn man statt p, p_1, q, q_1 ihre Werthe setzt

$$\left.\begin{aligned} F(x \pm x_1) &= Fx \,.\, fx_1 \pm Fx_1 \,.\, fx \\ f(x \pm x_1) &= fx \,.\, fx_1 \mp Fx \,.\, Fx_1 \end{aligned}\right\} \ldots \delta)$$

130. Die Gleichung α) kann auf mannichfache Weise eine veränderte Gestalt erhalten: setzt man nämlich $\frac{p}{q} = r$, $\frac{1}{q} = s$, oder $\frac{q}{p} = t$, $\frac{1}{p} = u$, oder $1 - q = v$, $1 - p = w$; so erhält man aus α) die Gleichungen:

$r^2 + 1 = s^2 \ldots \varepsilon)$, $t^2 + 1 = u^2 \ldots \zeta)$, $(1 - v)^2 + (1 - w)^2 = 1 \ldots \eta)$

Hiedurch entstehen, außer den beiden Hauptfunktionen p, q noch sechs Hülfsfunktionen r, s, t, u, v und w, welche von jenen auf eine sehr einfache Art abhängen, und doch in vielen Fällen brauchbarer sind, als die Hauptfunktionen. Man nennt alle diese Funktionen, von ihrem Gebrauche bei Winkelmessungen, die goniometrischen Funktionen, und bezeichnet sie so:

Fx oder p	durch	$\sin x$	t durch	$\cot x$
fx q		$\cos x$	u	$\operatorname{cosec} x$
r		$\operatorname{tang} x$	v	$\operatorname{sinv} x$
s		$\sec x$	w	$\operatorname{cosv} x$

sie werden ausgesprochen: Sinus, Kosinus, Tangens, Sekans, Kotangens, Kosekans, Sinusversus, Kosinusversus.

131. Man hat demnach (128)

$\sin 0 = 0$, $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$, $\sin 2\pi = 0$, und überhaupt

$\sin r\pi = 0$, $\sin \frac{1}{2}(4r + 1)\pi = +1$, $\sin \frac{1}{2}(4r + 3)\pi = -1$:

ferner ist

$\cos 0 = +1, \cos \frac{1}{2}\pi = 0, \cos \pi = -1, \cos \frac{3}{2}\pi = 0, \cos 2\pi = +1,$

und allgemein

$\cos \frac{1}{2}(2r+1)\pi = 0, \cos 2r\pi = +1, \cos (2r+1)\pi = -1.$

Endlich geben die Gleichungen α) und β) für jeden Werth α von x

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \ldots \quad 86)$$

ferner $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ . . . 87)

Setzt man aber in den Gleichungen δ), α statt x, und β statt x_1, so folgt

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha . \cos\beta \pm \cos\alpha . \sin\beta \quad \ldots \quad 88)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha . \cos\beta \mp \sin\alpha . \sin\beta \quad \ldots \quad 89)$$

und hieraus erhält man, für $\alpha = \pi$

$\sin(\pi \pm \beta) = \mp \sin\beta$, ferner $\cos(\pi \pm \beta) = -\cos\beta$ d. i. die Sinus und Kosinus zweier Größen die sich zu π ergänzen, sind einander gleich. Dagegen gibt die Voraussetzung $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, die Gleichung $\sin(\frac{1}{2}\pi - \beta) = \cos\beta$, und wenn man hier $\frac{1}{4}\pi \pm \beta$ statt β schreibt; so wird $\sin(\frac{1}{4}\pi + \beta) = \cos(\frac{1}{4}\pi \pm \beta)$ d. i. der Sinus irgend einer Größe ist zugleich der Kosinus einer andern, die mit der ersteren $\frac{1}{2}\pi$ beträgt.

Für $\beta = 0$, folgt hieraus $\sin\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi$, also wegen 86) $\sin^2\frac{1}{4}\pi + \cos^2\frac{1}{4}\pi = 2\sin^2\frac{1}{4}\pi = 1$, oder $\sin\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ . . . 90)

132. Durch die Addition und Subtraktion der Gleichungen 88), erhält man unmittelbar:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha . \cos\beta \quad \ldots \quad 91)$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha . \sin\beta \quad \ldots \quad 92)$$

und eben so aus den Gleichungen 89)

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha . \cos\beta \quad \ldots \quad 93)$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha . \sin\beta \quad \ldots \quad 94)$$

Macht man $\alpha+\beta = a$, $\alpha-\beta = b$, woraus $\alpha = \frac{1}{2}(a+b)$, $\beta = \frac{1}{2}(a-b)$ folgt, so geben die Formeln 91) bis 94)

$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) . \cos \frac{1}{2}(a-b)$
$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) . \sin \frac{1}{2}(a-b)$
$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) . \cos \frac{1}{2}(a-b)$ und
$\cos b - \cos a = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) . \sin \frac{1}{2}(a-b)$, daher wenn man a, b mit α, β vertauscht

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) . \cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ . . . 95)
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta) . \sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ . . . 96)
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta) . \cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ . . . 97)
$\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) . \sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ . . . 98

133. Man setze in den Formeln 88) und 89) $\alpha = m\beta$, so wird

$\sin(m+1)\beta = \sin m\beta . \cos \beta + \cos m\beta . \sin \beta$ . . . 99)
$\cos(m+1)\beta = \cos m\beta . \cos \beta - \sin m\beta . \sin \beta$ . . . 100)

und hieraus ergeben sich die Sinus und Kosinus der Vielfachen von β, wenn man statt m nach und nach 1, 2, 3 ... setzt, nämlich

$\sin 2\beta = 2 \sin \beta . \cos \beta$ . . . 101)
$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$ . . . 102)
$\sin 3\beta = 3 \sin \beta . \cos^2 \beta - \sin^3 \beta$ . . . 103)
$\cos 3\beta = \cos^3 \beta - 3 \sin^2 \beta . \cos \beta$ u. s. f. 104)

Substituirt man in 102) einmahl $1 - \cos^2 \beta$ statt $\sin^2 \beta$, ein zweites Mahl $1 - \sin^2 \beta$ statt $\cos^2 \beta$, so erhält man

$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1$ . . . und 105)
$\cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta$ . . . mithin ist 106)

$\sin^2 \beta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta)$, und $\cos^2 \beta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta)$, oder wenn man $\frac{1}{2}\alpha$ statt β schreibt,

$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}$ . . ., und 107)
$\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$ . . . 108)

Setzt man in diesen Formeln $\frac{1}{2}\pi - \beta$ statt α, so erhält man

$\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sin \beta)}$ . . . 109)
$\cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sin \beta)}$ . . . 110)

Entwickelt man die Ausdrücke links des Gleichheitszeichens nach 88) und 89), so erhält man wegen 90)

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{(1-\sin\beta)} \quad \ldots \quad 111)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{(1+\sin\beta)} \quad \ldots \quad 112)$$

und durch Addition, und Subtraktion dieser Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}[\sqrt{(1+\sin\beta)} + \sqrt{(1-\sin\beta)}] \quad \ldots \quad 113)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}[\sqrt{(1+\sin\beta)} - \sqrt{(1-\sin\beta)}] \quad \ldots \quad 114)$$

134. Will man die Sinus und Kosinus der Vielfachen von β, so viel als möglich, bloß durch $\sin\beta$ allein, oder bloß durch $\cos\beta$ allein darstellen, so kann man dieß leicht erhalten, wenn man in 91) und 93) $m\beta$ statt α, und 2β statt β, setzt. Dieß gibt:

$$\sin(m+2)\beta = 2\sin m\beta.\cos 2\beta - \sin(m-2)\beta$$
$$\cos(m+2)\beta = 2\cos m\beta.\cos 2\beta - \cos(m-2)\beta,$$

woraus wegen 106) folgt,

$$\sin(m+2)\beta = 2(1-2\sin^2\beta)\sin m\beta - \sin(m-2)\beta \ldots 115)$$
$$\cos(m+2)\beta = 2(1-2\sin^2\beta)\cos m\beta - \cos(m-2)\beta \ldots 116)$$

Setzt man hier statt m, nach und nach 2, 4, 6, ... und Kürze halber $\sin\beta = p$, $\cos\beta = q$, so findet man wegen 101)

$$\left.\begin{aligned}
\sin 4\beta &= (4p - 8p^3)\,q \\
\sin 6\beta &= (6p - 32p^3 + 32p^5)\,q \\
\sin 8\beta &= (8p - 80p^3 + 192p^5 - 128p^7)\,q \text{ u. s. f.}
\end{aligned}\right\} 117)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos 4\beta &= 1 - 8p^2 + 8p^4 \\
\cos 6\beta &= 1 - 18p^2 + 48p^4 - 32p^6 \\
\cos 8\beta &= 1 - 32p^2 + 160p^4 - 256p^6 + 128p^8 \\
&\text{u. s. f.}
\end{aligned}\right\} 118)$$

Setzt man aber statt m die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ... so folgt

$$\left.\begin{aligned}
\sin 3\beta &= 3p - 4p^3 \\
\sin 5\beta &= 5p - 20p^3 + 16p^5 \\
\sin 7\beta &= 7p - 56p^3 + 112p^5 - 64p^7 \text{ u. s. f.}
\end{aligned}\right\} 119)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos 3\beta &= (1 - 4p^2)\,q \\
\cos 5\beta &= (1 - 12p^2 + 16p^4)\,q \\
\cos 7\beta &= (1 - 24p^2 + 80p^4 - 64p^6)\,q \text{ u. s. f.}
\end{aligned}\right\} 120)$$

135. Die Formeln 91) und 93) geben aber noch wenn man $m\beta$ statt α setzt:

$$\sin(m+1)\beta = 2\sin m\beta . \cos\beta - \sin(m-1)\beta \quad 121)$$

$$\cos(m+1)\beta = 2\cos m\beta . \cos\beta - \cos(m-1)\beta \quad 122)$$

und hieraus folgt für m gleich 1, 2, 3, 4 . . .

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\beta &= 2pq \\ \sin 3\beta &= p(4q^2-1) \\ \sin 4\beta &= p(8q^3-4q) \\ \sin 5\beta &= p(16q^4-12q^2+1) \text{ u. s. f.} \end{aligned}\right\} 123)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\beta &= 2q^2-1 \\ \cos 3\beta &= 4q^3-3q \\ \cos 4\beta &= 8q^4-8q^2+1 \\ \cos 5\beta &= 16q^5-20q^3+5q \text{ u. s. f.} \end{aligned}\right\} 124)$$

Setzt man der Reihe nach $3\beta = \pi$, $4\beta = \pi$, $5\beta = \pi$ in 123), und $3\beta = \frac{1}{2}\pi$, $4\beta = \frac{1}{2}\pi$, $5\beta = \frac{1}{2}\pi$ in 124), so erhält man wegen $\sin\pi = 0$, $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, die Gleichungen:

$4q^2 - 1 = 0$ woraus folgt: $q = \cos\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}$ 125)

$2q^2 - 1 = 0$ $q = \cos\frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$, wie in 90)

$16q^4 - 12q^2 + 1 = 0$, $q = \cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}$

und diese Wurzelgröße nach der bekannten Formel:

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}[a+\sqrt{(a^2-b)}]} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}[a-\sqrt{(a^2-b)}]} \quad 126)$$

behandelt, gibt $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, ferner ist 127)

$4q^2 - 3 = 0$ $q = \cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 128)

$8q^4 - 8q^2 + 1 = 0$, $q = \cos\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{2}})$ 129)

$16q^4 - 20q^2 + 5 = 0$, $q = \cos\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{4}(10+2\sqrt{5})$ 130)

Aus diesen Werthen findet man vermittelst der Formel 86)

$\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ 131)

$\sin\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-2\sqrt{2})}$ 132)

$\sin\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$ 133)

Setzt man endlich in 88) und 89) $\frac{1}{3}\pi$, und $\frac{1}{6}\pi$ statt α so erhält man

$$\sin(\tfrac{1}{3}\pi \pm \beta) = \tfrac{1}{2}[\cos\beta\sqrt{3} \pm \sin\beta] \quad 134)$$

$$\cos(\tfrac{2}{3}\pi \pm \beta) = \tfrac{1}{2}[\cos\beta \mp \sin\beta \sqrt{3}] \quad 135)$$
$$\sin(\tfrac{1}{6}\pi \pm \beta) = \tfrac{1}{2}[\cos\beta \pm \sin\beta \sqrt{3}] \quad 136)$$
$$\cos(\tfrac{1}{6}\pi \pm \beta) = \tfrac{1}{2}[\cos\beta \sqrt{3} \mp \sin\beta], \quad 137)$$

woraus sofort folgt

$$\sin(\tfrac{1}{3}\pi \pm \beta) = \cos(\tfrac{1}{6}\pi \mp \beta),\ \cos(\tfrac{1}{6}\pi \pm \beta) = \sin(\tfrac{1}{3}\pi \mp \beta)$$

wie (131).

136. Die Formel 93) gibt, wenn man einmahl $\beta+\gamma$ und dann $\beta-\gamma$ statt β setzt, mit Rücksicht auf 87)

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) = 2\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)$$
$$\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) = 2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma),$$

deren Summe, wegen 93)

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) = 4\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma, \text{ wird} \quad 138)$$

Setzt man hier $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\gamma$ statt α, β, γ und bezeichnet die halbe Summe $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ mit σ; so folgt

$$\cos\sigma + \cos(\sigma-\alpha) + \cos(\sigma-\beta) + \cos(\sigma-\gamma) = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha.\cos\tfrac{1}{2}\beta.\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad 139)$$

Wofern $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ist, wird

$\cos\sigma = 0$, $\cos(\sigma-\alpha) = \sin\alpha$, u. s. f. also

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha.\cos\tfrac{1}{2}\beta.\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad 140)$$

Man setze hier statt α, β, γ nach einander

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha,\ \pi-\beta,\ \pi-\gamma \\ \pi-\alpha,\ -\beta,\ \pi-\gamma \\ \pi-\alpha,\ \pi-\beta,\ -\gamma \end{array}\right\}$$

so erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\beta.\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\ \sin\gamma+\sin\alpha-\sin\beta = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\cos\tfrac{1}{2}\beta.\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\ \sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\beta.\cos\tfrac{1}{2}\gamma \end{array}\right\} \quad 141)$$

multiplizirt man nun die erste dieser Gleichungen mit 142), und die beiden letzten mit einander, und berücksichtigt 101), so erhält man

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha)}{4\sin\beta.\sin\gamma} \quad 142)$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(\sin\alpha+\sin\gamma-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma)}{4\sin\beta.\sin\gamma} \quad 143)$$

V. Goniometrische Hülfsfunktionen.

137. Die Hülfsfunktionen *tg.*, *cot.*, *cosec.*, *sinv.*, *cosv.*, stehen zu den Hauptfunktionen *sin cos*, in Beziehungen, welche aus den Gleichungen (130) bestimmt werden. Es ist nämlich

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 144)$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad 145)$$

$$cot\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad 146)$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad 147)$$

$$sinv\,\alpha = 1 - \cos\alpha \qquad 148)$$

$$cosv\,\alpha = 1 - \sin\alpha \qquad 149)$$

und die Gleichungen ε) und ζ) geben noch

$$sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha \qquad 150)$$

$$cosec^2\alpha = 1 + cot^2\alpha \qquad 151)$$

Aus 144) und 146) folgt unmittelbar

$$\sin\alpha = \cos\alpha . tg\,\alpha \qquad 152)$$

$$\cos\alpha = \sin\alpha . cot\,\alpha, \text{ und eben so aus 145) und 147)} \qquad 153)$$

$$sec\,\alpha . \cos\alpha = 1 \qquad 154)$$

$$\sin\alpha . cosec\,\alpha = 1, \text{ wenn man aber 144) und 146)} \qquad 155)$$

mit einander multiplizirt, wird

$$tg\,\alpha . cot\,\alpha = 1 \qquad 156)$$

138. Setzt man in 144) nach einander $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ statt α, so erhält man:

$tg\,0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$, $tg\,\frac{1}{2}\pi = \frac{\sin\frac{1}{2}\pi}{\cos\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{0} = \infty$, $tg\,\pi = 0$, $tg\,\frac{3}{2}\pi = -\infty$, $tg\,2\pi = 0$; und eben so findet man aus 145)

$sec\,0 = 1$, $sec\,\frac{1}{2}\pi = \infty$, $sec\,\pi = -1$, $sec\,\frac{3}{2}\pi = \infty$, $sec\,2\pi = 1$, ferner aus 146)

$cot\,0 = \infty$, $cot\,\frac{1}{2}\pi = 0$, $cot\,\pi = -\infty$, $cot\,\frac{3}{2}\pi = 0$, $cot\,2\pi = 0$
aus 147)
$cosec\,0 + \infty$, $cosec\,\frac{1}{2}\pi = 1$, $cosec\,\pi = \infty$, $cosec\,\frac{3}{2}\pi = -1$
$cosec\,2\pi = \infty$ aus 148)
$sinv\,0 =$ ●, $sinv\,\frac{1}{2}\pi = 1$, $sinv\,\pi = 2$, $sinv\,\frac{3}{2}\pi = 1$, $sinv\,2\pi = 0$
endlich aus 149)
$cosv\,0 = 1$, $cosv\,\frac{1}{2}\pi = 0$, $cosv\,\pi = 1$, $cosv\,\frac{3}{2}\pi = 2$,
$cosv\,2\pi = 1$.

139. Da man $sin\,(\frac{1}{4}\pi \mp \alpha) = cos\,(\frac{1}{4}\pi \pm \alpha)$ hat, so ist auch
$tg\,(\frac{1}{4}\pi \mp \alpha) = cot\,(\frac{1}{4}\pi \pm \alpha)$, und $sec\,(\frac{1}{4}\pi \mp \alpha) = cosec\,(\frac{1}{4}\pi \pm \alpha)$ d. i. bei zwei Größen, die zusammen $\frac{1}{2}\pi$ betragen, ist die Tangente der einen, zugleich Kotangente der andern Größe, und die Sekante der ersteren, ist die Kosekante der letzteren, und umgekehrt.

140. Bestimmt man den Werth von $sec\,\alpha$ aus der Formel 150) und setzt ihn statt $\frac{1}{cos\,\alpha}$ in die Formel 152), so erhält man

$$sin\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{(1 + tg^2\alpha)}}, \text{ und eben so folgt aus 153)} \quad 157)$$

$$cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + tg^2\alpha)}}, \text{ oder auch wenn man } \frac{1}{cot\,\alpha} \quad 158)$$

statt $tg\,\alpha$ setzt, wird

$$sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + cot^2\alpha)}}, \text{ und} \quad 159)$$

$$cos\,\alpha = \frac{cot\,\alpha}{\sqrt{(1 + cot^2\alpha)}} \quad 160)$$

141. Dividirt man die Gleichungen 88) und 89) durch $sin\,\alpha . sin\,\beta$ und dann durch $cos\,\alpha . cos\,\beta$, so erhält man wegen 144) und 146),

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha . \sin\beta} = \cot\beta \pm \cot\alpha \quad 161)$$

$$\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha . \sin\beta} = \cot\alpha . \cot\beta \mp 1 \quad 162)$$

$$\frac{\sin(\alpha . \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = tg\,\alpha \pm tg\,\beta \quad 163)$$

$$\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha . \cos\beta} = 1 \mp tg\,\alpha . tg\,\beta \text{; die beiden letzteren ge-} \quad 164)$$

ben durch einander getheilt

$$tg\,(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\,\beta}, \text{ und eben so folgt aus} \quad 165)$$

den zwei ersteren Gleichungen

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha . \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}. \quad 166)$$

Ist hier $\alpha = \beta$, so geben die oberen Zeichen

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}, \quad 167)$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}. \quad 168)$$

Man hat aber $\sin\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi$, also $tg\,\frac{1}{4}\pi = \cot\frac{1}{4}\pi = 1$ 169)

und für diesen Werth von α, gibt 165)

$$tg\,(\tfrac{1}{4}\pi \pm \beta) = \frac{1 \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\beta}, \text{ und 166)} \quad 170)$$

$$\cot(\tfrac{1}{4}\pi \pm \beta) = \frac{\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm 1} \quad 171)$$

142. Dividirt man die Gleichungen 95) und 96) mit einander, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{tg\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}, \text{ und eben so aus} \quad 172)$$

97) und 98)

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \cot\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) . \cot\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad 173)$$

Auf gleiche Weise erhält man aus 107) und 108)

$$tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad 174$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \qquad 175$$

: multiplizirt man aber den Zähler und Nenner des Bruches einmahl mit $1+\cos\alpha$, und dann mit $1-\cos\alpha$, so ergibt sich

$$tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad 176$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad 177$$

Aus 174) folgt aber, wenn man 2β statt α setzt

$tg^2\beta = \dfrac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}$, also $\cos 2\beta = \dfrac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta}$, oder wegen 145)

$$\sec 2\beta = \frac{1+tg^2\beta}{1-tg^2\beta}, \text{ folglich hat man aus 167)} \qquad 178)$$

$$\sec 2\beta \pm tg\,2\beta = \frac{1\pm 2\,tg\,\beta + tg^2\beta}{1-tg^2\beta} = \frac{(1\pm tg\,\beta)^2}{(1+tg\,\beta)(1-tg\beta)}$$

$$= \frac{1\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\beta}, \text{ daher ist wegen 170)}$$

$$\sec 2\beta \pm tg\,2\beta = tg\left(\tfrac{1}{4}\pi \pm \beta\right), \text{ d. i.} \qquad 179)$$

$$\sec 2\beta = \tfrac{1}{2}\left[tg\left(\tfrac{1}{4}\pi+\beta\right) + tg\left(\tfrac{1}{4}\pi-\beta\right)\right] \qquad 180)$$

Multiplizirt man 168) mit $tg\,\alpha$, und subtrahirt von 178) nachdem man α mit β vertauscht hat, die Einheit, so folgt

$$tg\,2\alpha . tg\,\alpha = \sec 2\alpha - 1 \qquad 181)$$

Die Gleichung 148) gibt $\cos\alpha = 1 - sinv\,\alpha$, und diesen Werth statt $\cos\alpha$ im Ausdrucke $\sin\alpha = \sqrt{(1-\cos^2\alpha)}$ gesetzt, erhält man

$\sin\alpha = \sqrt{(2\,sinv\,\alpha - sinv^2\alpha)}$, und eben so

$$\cos\alpha = \sqrt{(2\,cosv\,\alpha - cosv^2\alpha)} \qquad 182)$$

Die Formel 164) gibt

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha . \cos\beta\,(1\mp tg\,\alpha . tg\beta)$,

woraus mit Rücksicht auf 145) folgt,

$sec(\alpha \pm \beta) = \frac{sec\,\alpha . sec\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\beta}$, und eben so erhält man 184)

$cosec(\alpha \pm \beta) = \frac{cosec\,\alpha . cosec\,\beta}{(cot\,\beta \pm cot\,\alpha)}$ 185)

Setzt man hierin $\alpha = \beta$, so wird

$sec\,2\alpha = \frac{sec^2\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ übereinstimmend mit 178), und 186)

$cosec\,2\alpha = \frac{cosec^2\alpha}{2\,cot\,\alpha} = \frac{sec^2\alpha}{2\,tg\,\alpha}$ 187)

144. Gleichwie $sin\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$, u. s. f. Funktionen von x sind, so kann man umgekehrt x als Funktion von $sin\,x$, oder von $cos\,x$, oder von $tg\,x$ u. s. f. betrachten; man bezeichnet sie dann so: wenn

$sin\,x = y$ ist, so hat man $x = arc.\,sin\,y$

$cos\,x = y$ $\quad x = arc.\,cos\,y$

$tg\,x = y$ $\quad x = arc.\,tg\,y$ u. s. f.

So gibt die Formel 101) wenn man $sin\,\beta = y$, also $cos\,\beta = \sqrt{(1 - y^2)}$ setzt, durch Umkehrung der Formel $sin\,2\beta = 2y\sqrt{(1 - y^2)}$,

$\beta = arc.\,sin\,y = \frac{1}{2}\,arc.\,sin\,[2y\sqrt{(1 - y^2)}]$ 188)

und die Formel 165) gibt, wenn man

$tg\,\alpha = x$, $tg\,\beta = y$ setzt,

$arc.\,tg\,x \pm arc.\,tg\,y = arc.\,tg\,\frac{x \pm y}{1 \mp xy}$, welche für $x = y$ 189)

in $arc.\,tg\,x = \frac{1}{2}\,arc.\,tg\,\frac{2x}{1 - x^2}$ übergeht. 190)

VI. Der Moawr'sche Lehrsatz.

145. Setzt man $cos\,x$ gleich einer Reihe, welche nach den Potenzen von x fortlauft, so muß das von x freie Glied $= 1$ werden, weil $cos\,0 = 1$ ist, auch kann sie nur gerade Potenzen von x enthalten, weil sie gemäß

der Formel 87) sich nicht ändern darf, wenn man $-x$ statt x setzt. Es sei also

$\cos x = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \ldots$ α) und eben so

$\cos y = 1 + Ay^2 + By^4 + Cy^6 + \ldots$, daher

$\cos x . \cos y = \cos x + A \cos x . y^2 + B \cos x . y^4 \ldots$ β)

Man hat aber nach 93)

$2 \cos x . \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, und es ist der Form α) gemäß

$$\left.\begin{aligned}\cos(x+y) &= 1 + A(x+y)^2 + B(x+y)^4 + C(x+y)^6 + \ldots \\ \cos(x-y) &= 1 + A(x-y)^2 + B(x-y)^4 + C(x-y)^6 + \ldots\end{aligned}\right\} \gamma)$$

mithin

$$\tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = 1 + A(x^2+y^2) + B(x^4 + 6x^2y^2 + y^4) + C(x^6 + 15x^4y^2 + \ldots) + D(x^8 + 28x^6y^2 + \ldots)$$

entwickelt man diesen Ausdruck, und ordnet nach y so erhält man $1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \ldots$

$+ (A + 6Bx^2 + 15Cx^4 + 28Dx^6 + \ldots)y^2 + \alpha y^4 + \beta y^6 + \ldots$

setzt man nun hier und in β) die Koeffizienten von y^2 einander gleich, so folgt

$$A + 6Bx^2 + 15Cx^4 + 28Dx^6 + \ldots = A\cos x = A + A^2x^2 + AB^4 + ACx^6 + \ldots$$

woraus man die Gleichungen erhält

$A = A$: dieß gibt $A = A = 2A : 2!$

$6B = A^2$ $\quad B = \frac{2}{6}A^2 = (2A)^2 : 4!$

$15C = AB$ $\quad C = \frac{1}{15}AB = (2A)^3 : 6!$

$28D = AC$ u. s. f. $D = \frac{1}{28}AC = (2A)^4 : 8!$

man hat also

$$\cos x = 1 + \frac{2Ax^2}{2!} + \frac{(2A)^2x^4}{4!} + \frac{(2A)^3x^6}{6!} + \frac{(2A)^4x^8}{8!} + \ldots \delta)$$

Da für A jeder Werth gesetzt werden kann, so hat man unendlich viele Reihen, welche alle dieselbe Eigenschaft mit $\cos x$ gemein haben.

146. Die Reihe, welche $\sin x$ ausdrückt, kann nur ungerade Potenzen von x enthalten, weil nach 87) $\sin x$ sein Vorzeichen ändert, wenn $-x$ statt x gesetzt wird. Setzt man also $\sin x = ax + bx^3 + cx^5 + \ldots \varepsilon)$ daher

$$\sin y = ay + by^3 + cy^5 + \ldots \text{ so folgt}$$

$$-\sin x . \sin y = -(a \sin x . y + b \sin x . y^3 + c \sin x . y^5 + \ldots) \ldots \eta)$$

Nun ist nach 94) $\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)] = -\sin x \sin y$, und nach den Formeln γ)

$$\tfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$
$$= (2Ax + 4Bx^3 + 6Cx^5 + \ldots)y + \mu y^3 + \ldots$$

sonach ist $2Ax + 4Bx^3 + 6Cx^5 + \ldots = -a \sin x$

$$= -a^2 x - abx^3 - acx^5 - \ldots$$

woraus die Gleichungen folgen:

$2A = -a^2$ oder $A = -\frac{1}{2}a^2 = -a^2 : 2!$

$4B = -ab$, $b = -4B : a = -\frac{4}{6}A^2 : a = -a^4 : 3!$

$6C = -ac$, $c = -6C : a = -6(2A)^3 : 6! a = +a^5 : 5!$

$8D = -ad$, $d = -a^7 : 7!$ u. s. f.

Substituirt man die für A, und b, c, d ... gefundenen Werthe in den Gleichungen δ) und ε), so erhält man

$$\cos x = 1 - \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^4x^4}{4!} - \frac{a^6x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = ax - \frac{a^3x^3}{3!} + \frac{a^5x^5}{5!} - \frac{a^7x^7}{7!} + \ldots$$

wo jetzt nur noch der Werth von a zu suchen ist. Am einfachsten ist es aber $a = 1$ zu nehmen, da dann $\sin x$, $\cos x$ natürliche Funktionen von x heißen; dieß gibt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots \quad 191)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots \quad 192)$$

147. Dividirt man diese Reihen mit einander, so erhält man die für $tg\,x$, $cot\,x$ zugehörigen Reihen. Zu

diesem Ende setze man

$$tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots$$

wo die Reihe nach ungeraden Potenzen von x fortläuft, weil $tg(-x) = -tg\,x$ ist, also die Reihe ihr Vorzeichen ändern muß, wenn man $-x$ statt x setzt. Multiplizirt man beiderseits mit $cos\,x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot4}x^4 - \ldots$ so erhält man leicht

$$sin\,x = Ax + (B - \tfrac{1}{2}A)x^3 + (C - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2\cdot4}A)x^5 + \ldots$$

und wenn man hierin die Reihe für $sin\,x$ substituirt, so entstehen die Bedingungsgleichungen:

$1 = A$; . . . woraus sich ergibt $A = 1$

$-\frac{1}{2!} = B - \frac{A}{2!}$ $\qquad B = \frac{1}{1.3}$.

$+\frac{1}{5!} = C - \frac{B}{2!} + \frac{A}{4!}$ u. s. f. $\qquad C = \frac{2}{1.3.5}$

man hat also

$$tg\,x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7.3} + \ldots \qquad 193)$$

und auf gleiche Weise findet man

$$cot\,x = \frac{1}{x} - \frac{x}{1.3} - \frac{x^3}{1.3.5.3} - \frac{2x^5}{1.3.5.7.3^2} - \ldots \qquad 194)$$

148. Die Formel 80) gibt, wenn man $x\sqrt{-1}$ statt x setzt, und berücksichtiget, daß $(\sqrt{-1})^2 = -1$, $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^4 = +1$, $(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$, u. s. f. ist,

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{5!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$$

oder wenn man die möglichen und die unmöglichen Glieder zusammenstellt, so erhält man wegen 191) und 192)

$e^{x\sqrt{-1}} = cos\,x + sin\,x.\sqrt{-1}$, und eben so 195)

$e^{-x\sqrt{-1}} = cos\,x - sin\,x.\sqrt{-1}$; woraus so fort folgt: 196)

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$, und 197)

$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; daher 198)

$tg\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}$, welches oben und unten mit $e^{x\sqrt{-1}}$ multiplizirt, gibt

$tg\, x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}$. Wenn gleich diese Ausdrücke 199) in einer imaginären Form erscheinen, so sieht man doch, daß diese bei ihrer Entwickelung wegfällt, mithin ihnen nur scheinbar zukommt.

Setzt man nun in 193) und 196) nx statt x, so folgt

$e^{\pm nx\sqrt{-1}} = \cos nx \pm \sin nx.\sqrt{-1}$. Allein 200)

$e^{\pm nx\sqrt{-1}} = (e^{\pm x\sqrt{-1}})^n = (\cos x \pm \sin x.\sqrt{-1})^n$,

mithin hat man

$(\cos x \pm \sin x.\sqrt{-1})^n = \cos nx \pm \sin nx.\sqrt{-1}$ 201)

welcher vom Moivre zuerst angegebene Ausdruck der Moawr'sche Lehrsatz genannt wird.

149. Wir wollen nun die Ausdrücke für die Potenzen der Sinus und Kosinus einer Größe z, durch die Sinus und Kosinus ihrer Vielfachen entwickeln, und umgekehrt diese durch jene bestimmen. Sei also

$\cos z + \sin z\sqrt{-1} = t$, $\cos z - \sin z\sqrt{-1} = u$, α)

so erhält man durch die Addition dieser Gleichungen $2\cos z = t + u$, und durch die Multiplikation derselben $tu = \cos^2 z + \sin^2 z = 1$, also auch $t^2u^2 = 1$, $t^3u^3 = 1$ u. s. f.

Nun ist $2^n \cos^n z = (t+u)^n = t^n + nt^{n-1}u + \binom{n}{2} t^{n-2}u^2 + \binom{n}{3} t^{n-3}u^3 + \ldots nt u^{n-1} + u^n$, oder

$$2^n \cos^n z = t^n + nt^{n-2} + \binom{n}{2} t^{n-4} + \binom{n}{3} t^{n-6} + \ldots + nt^{-(n-2)} + t^{-n}, \beta)$$

weil $tu^{n-1} = \frac{t^{n-1}u^{n-1}}{t^{n-2}} = \frac{1}{t^{n-2}} = t^{-(n-2)}$ und

$u^n = \frac{t^n u^n}{t^n} = t^{-n}$ ist. Man hat aber aus 201)

$t^n = \cos nz + \sin nz.\sqrt{-1}$, $t^{-n} = \cos(-nz) + \sin(-nz)\sqrt{-1}$, und wegen 87) $\cos nz = \cos(-nz)$, und $\sin(-nz) = -\sin nz$, daher ist $t^n + t^{-n} = \cos 2nz$, und eben so folgt $t^{n-2} + t^{-(n-2)} = 2\cos(n-2)z$, $t^{n-4} + t^{-(n-4)} = 2\cos(n-4)z$, u. s. f.; wenn nun n eine gerade Zahl bedeutet, so ist in β) nach (18) das mittlere Glied $\binom{n}{\frac{1}{2}n} t^0 = \binom{n}{\frac{1}{2}n} \cos 0z = \binom{n}{\frac{1}{2}n}$, im Gegenfalle aber gibt es zwei mittlere Glieder mit gleichen Koeffizienten $\binom{n}{\frac{1}{2}(n-1)}$, deren Summe $\binom{n}{\frac{1}{2}(n-1)}[t + t^{-1}]$ $= 2\binom{n}{\frac{1}{2}(n-1)} \cos z$ ist. Hiernach gibt die Reihe β)

$$2^{n-1}\cos^n z = \cos nz + n\cos(n-2)z + \binom{n}{2}\cos(n-4)z + \ldots \quad 202)$$

Setzt man hierin statt n nach einander 2, 3, 4 . . .; so folgt

$$\left.\begin{aligned} 2\cos^2 z &= \cos 2z + 1 \\ 4\cos^3 z &= \cos 3z + 3\cos z \\ 8\cos^4 z &= \cos 4z + 4\cos 2z + 3 \\ 16\cos^5 z &= \cos 5z + 5\cos 3z + 10\cos z \\ 32\cos^6 z &= \cos 6z + 6\cos 4z + 15\cos 2z + 10 \end{aligned}\right\} \quad 203)$$

150. Zieht man aber die Gleichungen α) von einander ab, so erhält man $2\sin z\sqrt{-1} = t - u$, also $2^n \sin^n z(\sqrt{-1})^n = (t-u)^n$, durch deren Entwickelung die Reihe β) wieder zum Vorschein kommt, nur daß ihre Glieder wechselweise positiv und negativ werden.

Wenn nun n eine gerade Zahl bedeutet, so haben die vom Anfange und Ende der Reihe β) gleich weit abstehenden Glieder dieselben Zeichen, und man erhält hieraus wie zuvor

$$\pm 2^n \sin^n z = \cos nz - n\cos(n-2)z + \binom{n}{2}\cos(n-4)z - \ldots \quad 204)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine durch 4 theilbare Zahl ist, oder nicht: wofern aber n eine ungerade Zahl vorstellt, so haben die Glieder t^n und t^{-1}, t^{n-2} und $t^{-(n-2)}$, u. s. f. entgegengesetzte Zeichen, wodurch

$$t^n - t^{-n} = 2\sin nz.\sqrt{-1},\ t^{n-2} - t^{-(n-2)} = 2\sin(n-2)z\sqrt{-1}$$

u. s. f. wird, man erhält also in diesem Falle nach Beseitigung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1}$, den Ausdruck

$$\pm 2^n \sin^n z = \sin nz - n\sin(n-2)z + \binom{n}{2}\sin(n-4)z - \ldots \quad 205)$$

und hier ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem n durch 4 getheilt, die Reste 1 oder 3 läßt. Vergl. 3. I. 96. Hiernach ist

$$\left.\begin{aligned} -2\sin^2 z &= \cos 2z - 1 \\ -4\sin^3 z &= \sin 3z - 3\sin z \\ 8\sin^4 z &= \sin 4z - 4\cos 2z + 3 \\ 16\sin^5 z &= \sin 5z - 5\sin 3z + 10\sin z \\ -32\sin^6 z &= \cos 6z - 6\cos 4z + 15\cos 2z - 10 \end{aligned}\right\} \quad 206)$$

151. Setzt man in den Gleichungen α) $\cos z = q$, $\sin z = p$, also $t^n = (q + p\sqrt{-1})^n$, und entwickelt diesen Ausdruck nach dem binomischen Lehrsatze, so erhält man

$$t^n = q^n + nq^{n-1}p\sqrt{-1} - \binom{n}{2}q^{n-2}p^2 - \binom{n}{3}q^{n-3}p^3\sqrt{-1} + \binom{n}{4}q^{n-4}p^4 + \binom{n}{5}q^{n-5}p^5\sqrt{-1} - \binom{n}{6}q^{n-6}p^6 - \ldots$$

$$= q^n - \binom{n}{2}q^{n-2}p^2 + \binom{n}{4}q^{n-4}p^4 - \binom{n}{6}q^{n-6}p^6 + \ldots$$

$$+\sqrt{-1}[n\,q^{n-1}p-\binom{n}{3}q^{n-3}p^3+\binom{n}{5}q^{n-5}p^5-\ldots]$$

oder weil $t^n = \cos nz + \sin nz\sqrt{-1}$ ist, so wird, wenn man die möglichen, also auch die unmöglichen Theile dieser Ausdrücke einander gleich setzt

$$\cos nz = q^n-\binom{n}{2}q^{n-2}p^2+\binom{n}{4}q^{n-4}p^4-\binom{n}{6}q^{n-6}p^6+\ldots \quad 207)$$

$$\sin nz = [n\,q^{n-1}-\binom{n}{3}q^{n-3}p^2+\binom{n}{5}q^{n-5}p^4-\binom{n}{7}q^{n-7}p^6+\ldots]p \quad 208)$$

152. Die Formeln 195) und 196) geben unmittelbar

$$\pm x\sqrt{-1} = \lambda(\cos x \pm \sin x.\sqrt{-1}) \quad 209)$$

durch deren Subtraktion man erhält

$$2x\sqrt{-1} = \lambda\frac{\cos x + \sin x.\sqrt{-1}}{\cos x - \sin x.\sqrt{-1}},$$ oder wenn man Zähler und Nenner mit $\cos x$ dividirt

$$2x\sqrt{-1} = \lambda\frac{1+tg\,x.\sqrt{-1}}{1-tg\,x.\sqrt{-1}} \quad 210)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck mittelst der Reihe 83), und beseitiget den gemeinschaftlichen Faktor $2\sqrt{-1}$, so findet man leicht

$$x = tg\,x-\tfrac{1}{3}tg^3x+\tfrac{1}{5}tg^5x-\tfrac{1}{7}tg^7x+\ldots \quad 211)$$

man erhält aber auch diese Reihe, wenn man in 193) $x = A\,tg\,x+B\,tg^3x+C\,tg^5x+\ldots$ gesetzt, und hierauf die unbestimmten Koeffizienten A, B, C ... entwickelt hätte.

153. Man setze $a+b=\frac{1}{4}\pi$, so ist $tg\,(a+b) = tg\,\frac{1}{4}\pi = 1$, es ist aber nach 165)

$$tg\,(a+b) = \frac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a.tg\,b} = 1, \text{ woraus } tg\,b = \frac{1-tg\,a}{1+tg\,a}$$

folgt: ist nun $tg\,a = \frac{1}{2}$, so wird dann $tg\,b = \frac{1}{3}$, also nach 211)

$$a = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2})^5-\ldots,\quad b = \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5-\ldots$$

Die Summe je zweier Glieder dieser Reihen, nämlich

eines positiven und des nächstfolgenden negativen Gliedes ist

$$\frac{1}{n.2^n} - \frac{1}{(n+2)2^{n+2}} = \frac{3n+8}{n(n+2)2^{n+2}},$$

$$\frac{1}{n.3^n} - \frac{1}{(n+2)3^{n+2}} = \frac{8n+18}{n(n+2)3^{n+2}}$$

und weil hier immer n eine Zahl von der Form $4k+1$ ist, so wird diese Summe beziehungsweise

$$\frac{3(4k+1)+8}{(4k+1)(4k+3)2^{4k+3}} = \tfrac{11}{8}\cdot\frac{1}{(4k+1)(4k+3)4^{2k}} + \tfrac{12}{8}\cdot\frac{k}{(4k+1)(4k+3)4^{2k}} \text{ und}$$

$$\frac{8(4k+1)+18}{(4k+1)(4k+3)3^{4k+3}} = \tfrac{26}{27}\cdot\frac{1}{(4k+1)(4k+3)9^{2k}} + \tfrac{32}{27}\cdot\frac{k}{(4k+1)(4k+3)9^{2k}}$$

mittelst dieser Ausdrücke verwandeln sich obige Reihen in

$$a = \frac{11}{8}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.2^4} + \frac{1}{9.11.2^8} + \ldots\right) + \frac{12}{8}\left(\frac{1}{5.7.2^4} + \frac{2}{9.11.2^8} + \frac{3}{13.15.2^{12}} + \ldots\right)$$

$$b = \frac{26}{27}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.3^4} + \frac{1}{9.11.3^8} + \ldots\right) + \frac{32}{27}\left(\frac{1}{5.7.3^4} + \frac{2}{9.11.3^8} + \frac{3}{13.15.3^{12}} + \ldots\right),$$

welche Reihen schnell abnehmen, ihre Summe gibt $a \pm b = \frac{1}{4}\pi$, daher $\pi = 4(a+b) = 3,14159265\ldots$ wie oben. Eine noch schneller konvergirende Reihe ergibt sich für π, wenn man $tg\,\alpha = \frac{1}{5}$ setzt, dann folgt aus 167)

$tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} = \dfrac{5}{12}$; und für diesen Werth wird

$tg\,4\alpha = \dfrac{2.\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2} = \dfrac{120}{119}$; bezeichnet man mit A den Un-

terschied zwischen 4α und $\frac{1}{4}\pi$, also $A = 4\alpha - \frac{1}{4}\pi$, so hat man nach 170)

$tgA = \frac{tg4\alpha - 1}{1 + tg4\alpha} = \frac{1}{239}$, man erhält also mittelst des Ausdruckes 211)

$\frac{1}{4}\pi = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \ldots\right] - \frac{1}{239} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 - \ldots$

154. Die Größe π, deren numerischen Werth wir so eben angegeben haben, theilt man gewöhnlich in 180 gleiche Theile, die man Grade nennt, und jeden dieser Theile in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, oder aber was zur Vereinfachung der Rechnungen viel beiträgt, man unterscheidet die Grade nach der Dezimaleintheilung in Zehntel, Hundertel u. s. f. Die goniometrischen Tafeln enthalten gewöhnlich die Sinus und Tangenten einzelner Grade und ihrer Theile, nebst den briggischen Logarithmen dieser Funktionen, weil hieraus die übrigen goniometrischen Funktionen leicht abzuleiten sind.

VII. Die höheren Gleichungen.

155. Man nennt Wurzel einer Gleichung

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Px + Q = 0$

jeden Werth w, welcher statt x gesetzt, dieser Gleichung Genüge leistet, für welchen nämlich

$w^m + Aw^{m-1} + Bw^{m-2} + \ldots + Pw + Q = 0$ wird

z. B. Die Wurzeln der Gleichung $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$ sind $x = 2$, $x = -3$, $x = \sqrt{-1}$, und $x = -\sqrt{-1}$. Ist nun w die Wurzel einer Gleichung

$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Px + Q = 0$ 212)

und man dividirt sie mit $x - w$, so erhält man zum Quotienten eine Gleichung des nächst niedrigeren Grades, die man durch f_1x bezeichnen kann, und einen Rest R,

so daß man hat: $fx = (x-w)f_1x + R$. Da diese Gleichung für jeden Werth von x gelten muß, also auch für $x = w$, so wird hieraus $fw = R$, es soll aber w eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ sein, also $fw = 0$ werden, daher ist auch $R = 0$, und jede Gleichung $fx = 0$ ist durch den Wurzelfaktor $x - w$ immer ohne Rest theilbar.

156. Seien $a, b, c, \ldots p, q$ die Wurzeln der Gleichung

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Px + Q = 0;$$

so muß fx durch jeden der Wurzelfaktoren

$$x-a,\ x-b,\ x-c,\ \ldots\ x-p,\ x-q$$

ohne Rest sich theilen lassen. Dividirt man also fx durch $x-a$, so ist der Quotient f_1x eine Gleichung des $(m-1)$ten Grades, und man hat $fx = (x-a)f_1x$; dividirt man ferner f_1x durch $x-b$, so erhält man einen Quotienten f_2x des $(m-2)$ten Grades, und man hat eben so $f_1x = (x-b)f_2x$, also $fx = (x-a)(x-b)f_2x$: dividirt man nun f_2x durch $x-c$, und setzt den Quotienten des $(m-3)$ten Grades gleich f_3x, so ist $f_2x = (x-c)f_3x$, also $fx = (x-a)(x-b)(x-c)f_3x$ u. s. f. es wird demnach bei der Division mit jedem folgenden Wurzelfaktor der Grad der Gleichung um eine Einheit geringer, woraus hervorgeht, daß eine Gleichung $fx = 0$ des $m$ten Grades durch $m-2$ Divisionen auf den zweiten Grad herabsinkt; und da diese letztere nur zwei Wurzeln enthält, etwa $x = p$ und $x = q$; so kann eine jede Gleichung des $m$ten Grades $fx = 0$ nur m Wurzeln zulassen: hiedurch wird dieselbe ein Produkt von m Faktoren, nämlich

$$fx = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q) = 0.$$

157. Wir haben aber nach 12)

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q)$$

$$= x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots \pm Px \mp Q$$

hält man diesen Ausdruck gegen die Gleichung 212) so erhellet sogleich, daß in einer jeden vollständigen und geordneten Gleichung der 1te Koeffizient der Summe sämmtlicher Wurzeln, der 2te Koeffizient der Summe aller Verbindungen je zwei derselben, der 3te Koeff. der Summe aller Verbindungen je drei, u. s. f. endlich der letzte Koeff. dem Produkte sämmtlicher Wurzeln, und zwar mit eigenen oder mit entgegengesetzten Zeichen genommen gleich sei, je nachdem derselbe in der Reihe der Koeffizienten eine gerade oder eine ungerade Stelle einnimmt. Im obigen Beispiele ist die Summe sämmtlicher Wurzeln mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen $= -(2 - 3 + \sqrt{-1} - \sqrt{-1}) = +1$, die Summe der Produkte je zwei derselben $= -5$, je drei derselben mit entgegengesetzten Zeichen $= +1$, und das Produkt sämmtlicher Wurzeln $= -6$.

158. Geht also in einer Gleichung ein Glied ab, so sind ihre Wurzeln so beschaffen, daß die Summe ihrer Verbindungen nach dem Zeiger, welcher der Stellenzahl des Gliedes gleich kommt, null sei. Hiernach enthält eine Gleichung kein erstes Glied, wenn die Summe ihrer positiven Wurzeln, der Summe der negativen gleich ist, kein letztes Glied, wenn eine der Wurzeln selbst null ist, in welchem Falle sämmtliche Glieder der Gleichung durch x theilbar sind, und daher der Grad der Gleichung um eine Einheit vermindert werden kann. Z. B. die Wurzeln der Gleichung

$x^3 - 7x + 6 = 0$, sind $x = 1$, $x = 2$, und $x = -3$,

und die beiden positiven Wurzeln zusammengenommen sind der negativen gleich.

159. Wenn eine Gleichung ganze rationale Zahlen zu Koeffizienten hat, so kann sie irrationale und unmögliche Wurzeln nur in gerader Anzahl und paarweise enthalten, so zwar, daß einer jeden Wurzel $\alpha+\beta\sqrt{k}$, eine andere $=\alpha-\beta\sqrt{k}$ zugehört, weil nur dann das letzte Glied der Gleichung, oder das Produkt sämmtlicher Wurzeln eine ganze rationale Zahl werden kann; man hat nämlich, wenn K das Produkt aller rationalen Wurzeln vorstellt, $Q=K(\alpha+\beta\sqrt{k})(\alpha-\beta\sqrt{k})=K(\alpha^2-k\beta^2)$, welcher Ausdruck immer eine ganze rationale Zahl ist.

Ist k negativ, so sind die durch $\alpha\pm\beta\sqrt{k}$ angedeuteten Wurzeln imaginär, und der eingeklammerte Faktor wird nun $\alpha^2+k\beta^2$ eine stets positive Zahl; es geben also sämmtliche imaginäre Wurzelfaktoren eine Gleichung, deren letztes Glied positiv ist.

160. Hat nun eine Gleichung fx eine Anzahl reeller Wurzeln a, b, . . . $-a'$, $-b'$ . . . und mehrere imaginäre Wurzelnpaare deren Produkt eine Gleichung T gibt, so folgt

$fx=T(x-a)(x-b)\ldots(x+a')(x+b')\ldots$

Das von x freie Glied erhält man, wenn $x=0$ gesetzt wird, gleich dem Produkte aus dem letzten Gliede der Gleichung T, welches eine positive Größe ist (159), in die Faktoren $-a$, $-b$, . . . $+a'$, $+b'$, . . .: woraus erhellet, daß die reellen negativen und imaginären Wurzeln auf das Vorzeichen des letzten Gliedes keinen Einfluß haben, hingegen ist es positiv oder negativ, je nachdem die Zahl der reellen positiven Wurzeln einer Gleichung gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt, daß

eine Gleichung von ungerader Ordnung wenigstens eine reelle Wurzel hat, deren Zeichen dem Zeichen ihres letzten Gliedes entgegengesetzt ist, und daß eine Gleichung von gerader Ordnung zwei reelle Wurzeln besitzt, eine positive und eine negative, wenn ihr Endglied negativ ist.

161. In einer geordneten Gleichung $fx = o$, bilden gleiche Zeichen je zweier Nachbarglieder eine sogenannte Zeichenfolge, ungleiche Zeichen aber einen Zeichenwechsel. Sind nun sämmtliche Wurzeln der Gleichung reell und positiv, so werden die numerischen Werthe der Koeffizienten A, B, C . . . Q (157) wechselweise positiv und negativ, daher erhält die Gleichung lauter Zeichenwechsel, und es kann eine Gleichung nur dann Zeichenfolgen enthalten, wenn sie neben den positiven noch negative Wurzeln hat. Nehmen wir nun an, eine Gleichung fx enthalte, mit Hinweglassung der einzelnen Glieder, die Zeichen in folgender Ordnung:

$$+ - - + - - - + - + + + + - + - +$$

welche auch auf jede andere beliebige Art gewählt werden kann; so erhält man, wenn in dieselbe Gleichung eine negative Wurzel eingeführt, also fx mit $x + r$ multiplizirt wird, folgende Zusammenstellung der Zeichen

$$\begin{array}{l} + - - + - - - + - + + + + - + - + \\ \quad + - - + - - - + - + + + + - + - + \\ \hline + u - u u - - u u u + + + u u u u + \end{array}$$

man sieht, daß im Produkte nur jene Zeichen ungewiß sein können, wo in den beiden Summanden ungleiche Zeichen zusammentretten, und welche hier mit u bezeichnet erscheinen; ihre Anzahl ist demnach gerade so groß, als Zeichenwechsel in der Gleichung fx vorhanden sind: ferner fällt in die Augen, daß diese unbestimmten Zei-

chen zwischen gleiche oder ungleiche bestimmte Zeichen zu stehen kommen, je nachdem ihre Anzahl gerade oder ungerade ist. Bestimmt man nun diese u willkührlich und so, daß die größtmögliche Anzahl der Zeichenwechsel im Produkte entsteht, welches geschieht, wenn man die u wechselweise mit + und − ersetzt, so erhält man offenbar eben so viele Zeichenwechsel, als es u gibt, und daher hat das Produkt nicht mehr Zeichenwechsel als die Gleichung fx selbst, oder was einerlei ist, es hat die neue Gleichung wenigstens eine Folge mehr als die vorgelegte: und eben so beweiset man, daß durch Einführung einer positiven Wurzel in irgend eine Gleichung fx, die dann zum Vorschein kommende Gleichung wenigstens einen Zeichenwechsel mehr erhält. Hieraus folgt, daß eine Gleichung nicht mehr negative Wurzeln haben kann, als sie Zeichenfolgen enthält, und nicht mehr positive Wurzeln, als in ihr Zeichenwechsel vorkommen.

162. Fehlen in einer Gleichung eins oder mehrere Glieder so kann man ihre Stelle, sowohl durch $+0$, als auch durch -0 ersetzen, und hienach die Zahl der Wechsel und Folgen der Gleichung bestimmen. Erscheint nun in beiden Fällen nicht dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln und Folgen, welches so oft Statt hat, als zwischen zwei mit einerlei Zeichen behafteten Gliedern ein Glied abgeht, so hat die Gleichung unmögliche Wurzeln. Z. B. Die Gleichung $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ gibt durch ± 0 ergänzt $x^4 \pm 0 + 3x^2 \pm 0 - 4 = 0$; man erhält also für die oberen Zeichen $+ + + + -$, 3 Folgen und einen Wechsel, für die unteren Zeichen aber $+ - + - - -$, 3 Wechsel und eine Folge. Die Wurzeln dieser Gleichung, sind $x = 1, x = -1, x = 2\sqrt{-1}$, und $x = -2\sqrt{-1}$. Wofern in einer Gleichung kein

Glied abgeht, so kann man das Vorhandensein imaginärer Wurzeln dadurch erkennen, daß man dieselbe mit $x+r$ multiplizirt, und in der so entstehenden Gleichung die Werthe von r so wählt, daß hiedurch ein oder mehrere Glieder ihre Vorzeichen ändern: hat nun die neue Gleichung bei den angenommenen Werthen von r nicht durchgängig so viele Wechseln und Folgen, als in der ursprünglichen Gleichung mit Rücksicht auf die eingeführte Wurzel vorhanden sein müssen; so enthält sie unmögliche Wurzeln. Z. B. Die Gleichung

$x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0$ mit $x+r$ multiplizirt, gibt

$x^5+(2+r)x^4+(2r-4)x^3-(5+4r)x^2-(6+5r)x-6r=0$

für $r<2$ ist das Glied $2r-4$ negativ, also entstehen die Zeichen $++---$: hingegen für $r>2$, $+++---$; es kann also die Gleichung unmögliche Wurzeln haben: in der That sind ihre Wurzeln $+2, -3$, und $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$. Siehe V. I. 241.

163. Sei $fx=(x-a)^n(x-b)^r(x-c)\ldots$ eine Gleichung des mten Grades, welche n gleiche Wurzeln a, r gleiche Wurzeln b, und andere $m-(n+r)$ ungleiche Wurzeln enthält: stellt man sie durch

$x^m+\ldots+Kx^{m-1}+\ldots Ox^2+Px+Q=0$ vor, so ist nach (157) Q = dem Produkte sämmtlicher Wurzeln, unter denen a nmahl, b rmahl vorkommen, mithin ist Q eine durch $a^n b^r$ theilbare Zahl: ferner bedeutet P die Summe der Verbindungen der m Wurzeln nach dem Zeiger $m-1$; allein eine jede dieser Verbindungen kann die Wurzel a nicht weniger als $n-1$mahl, die Wurzel b nicht weniger als $r-1$mahl enthalten, sonach muß P durch $a^{n-1}b^{r-1}$ ohne Rest theilbar sein: eben so ergibt sich daß O durch $a^{n-2}b^{r-2}$ theilbar sein müsse u. s. f. und allgemein es bedeutet K die Summe

der Verbindungen der m Wurzeln nach dem Zeiger $m-n+1$; ist nun $n>r$, so muß unter diesen Verbindungen durchaus a wenigstens einmahl erscheinen, daher ist K nur noch durch a theilbar. Hieraus folgt, daß so oft eine Gleichung n gleiche Wurzeln a, und r gleiche Wurzeln b enthält, ihren Endglieder vom letzten anzufangen durch die Glieder der geometrischen Reihe $a^n b^r, a^{n-1}b^{r-1}, a^{n-2}b^{r-2}, \ldots a$, beziehungsweise theilbar sein müssen. Z. B. Die Gleichung $x^5-24x^3+64x^2+60x-72=0$ hat zum Endglied $72=2^3.3^2$, und die diesem vorangehenden Koeffizienten $60=5.2^2.3$, $64=32.2$ sind beziehungsweise durch $2^2.3$ und 2 theilbar, sonach kann 2 eine dreifache, und 3 eine doppelte Wurzel der Gleichung sein: sie ist wirklich $=(x-2)^3(x+3)^2$. Vergl. V. I. 212.

164. Man nennt Grenze der positiven Wurzeln einer Gleichung $fx=0$, denjenigen Werth g, welcher statt x in die Gleichung substituirt, dieselbe zu einer positiven Zahl macht: offenbar übersteigt sie die größte positive Wurzel einer Gleichung, da die letztere statt x gesetzt die Gleichung auf Null reduzirt. Man setze in der Formel 34) $a=1$, und $q=x$, so folgt

$$x^n=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots x+1)+1$$

wendet man diesen Ausdruck auf die einzelnen positiven Glieder der Gleichung

$$kx^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Px+Q=0 \text{ an,}$$

und läßt die negativen ungeändert, so erhält man

$$fx=(x-1)x^{m-1}+(k+A)(x-1)x^{m-2}$$
$$+(k+A+B)(x-1)x^{m-3}+\ldots$$
$$+(k+A+B+C\ldots)(x-1)x^{m-r}+\ldots$$
$$(k+A+B+\ldots)(x-1)+k+A+B+\ldots$$

Sei nun Gx^{m-r} das erste negative Glied, und man vereinige es mit dem Gliede der transformirten Gleichung, welches ebenfalls x^{m-r} zum Faktor hat, so folgt

$[(k+A+B+C+\ldots)(x-1)-G]x^{m-r}$, und dieser Ausdruck wird positiv, sobald man x gleich oder größer als $1+\frac{G}{k+A+B+C+\ldots}=g$ nimmt 213)

Verfährt man auf gleiche Art mit jedem negativen Gliede der Gleichung, so erhält man diejenigen Werthe von x, welche einzelne Glieder derselben positiv machen; der größte unter diesen Werthen ist daher nothwendig derjenige, der die Gleichung in eine positive Zahl umstaltet, mithin die gesuchte Grenze der Wurzeln. Z. B. Bei der Gleichung $4x^5-8x^4+23x^3+105x^2-80x+11=0$ dividire man 8 durch 4, und 80 durch $4+23+105$, so erhält $\frac{8}{4}$ und $\frac{80}{132}$, also $1+\frac{8}{4}=3$ die Grenze ihrer Wurzeln.

Da $\frac{G}{k}>\frac{G}{k+A+B+\ldots}$ ist, so folgt $1+\frac{G}{k}>g$ und auch $1+G>g$; man darf daher in Fällen, wo es sich um Darstellung allgemeiner Sätze handelt, den numerischen Werth des größten negativen Koeffizienten um die Einheit vergrößert zur Grenze der Wurzeln nehmen, wenn gleich derselbe noch sehr weit von der größten positiven Wurzel der Gleichung entfernt sein kann.

165. Wenn in der Gleichung

$$fx=x^m+Ax^{m-1}+\ldots-Gx^{m-r}+\ldots-Px+Q=0$$

Gx^{m-r} das erste negative Glied, und M den größten negativen Koeffizienten vorstellt, so muß offenbar die Summe aller Glieder positiv werden, wenn man

$x^m>M(x^{m-r}+x^{m-r-1}+\ldots+x+1)$, oder wegen 34)

$x^m > \frac{M(x^{m-r+1}-1)}{x-1}$, mithin auch, wenn man x so nimmt, daß

$x^m > \frac{M(x^{m-r+1})}{x-1}$ wird. Hieraus folgt

$x^{r-1} > \frac{M}{x-1}$: nimmt man nun x noch größer, daß schon $(x-1)^{r-1} > \frac{M}{x-1}$, oder $(x-1)^r > M$ wird, so geschieht jener Bedingung noch immer Genüge. Der letzte Ausdruck gibt aber $x > 1+\sqrt[r]{M}$, und wenn man statt $\sqrt[r]{M}$ die nächst größere rationale Zahl wählt, so erhält man $g = 1+\sqrt[r]{M}$. 3. B. die Gleichung 214) $x^4+x^3-29x^2-9x+180=0$, gibt $r=2, M=29$, also $g=1+\sqrt{29}=7$, die Grenze ihrer Wurzeln: die größte positive Wurzel ist 4.

166. Setzt man in der Gleichung

$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Px + Q = 0$

$-x$ statt x, wodurch die Glieder mit den ungeraden Potenzen von x ihr Vorzeichen ändern, so erhält man für ein ungerades m die Gleichung

$-x^m + Ax^{m-1} - Bx^{m-2} + \ldots - Px + Q = 0$

dividirt man durchgängig mit -1, so folgt

$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots + Px - Q = 0$,

wofern aber m gerade ist, so gibt obige Voraussetzung unmittelbar $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots - Px + Q = 0$ und die positiven Wurzel dieser verwandelten Gleichung sind mit den negativen Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ einerlei, so wie die positiven Wurzeln dieser letzteren den negativen der ersteren gleich gelten. Man erhält

daher die Grenze der negativen Wurzeln einer Gleichung, wenn man die Vorzeichen jedes geraden Gliedes derselben ändert, und für die verwandelte Gleichung die Grenze der positiven Wurzeln nach (164) oder (165) sucht. Im Beispiele (165) erhält man so die transformirte Gleichung $x^4 - x^3 - 29x^2 + 9x + 180 = 0$, welcher -30 als Grenze der negativen Wurzeln zugehört.

167. Eine Gleichung deren sämmtliche Koeffizienten ganze Zahlen sind, kann keine gebrochene Wurzeln haben: denn hätte die Gleichung 212) eine Wurzel $x = \frac{p}{q}$, so hätte man, diesen Werth statt x gesetzt,

$$\frac{p^m}{q^m} + \frac{Ap^{m-1}}{q^{m-1}} + \frac{Bp^{m-2}}{q^{m-2}} + \ldots + \frac{Pp}{q} + Q = 0$$

woraus folgt

$$-\frac{p^m}{q} = Ap^{m-1} + Bp^{m-2}q + Cp^{m-3}q^2 + \ldots + Ppq^{m-2} + Qq^{m-1};$$

mithin wäre p^m durch q, folglich auch p durch q theilbar, gegen die Voraussetzung.

Jede Gleichung mit reellen Wurzeln, die keine irrationalen Wurzeln enthält, kann also nur ganze Zahlen zu Wurzeln haben.

168. Sei w eine Wurzel der Gleichung 212), wodurch $w^m + Aw^{m-1} + \ldots Nw^2 + Ow^2 + Pw + Q = 0$ wird, dieß gibt $\frac{Q}{w} = -(w^{m-1} + Aw^{m-2} + \ldots + Nw^2 + Ow + P)$, welcher Ausdruck eine ganze Zahl ist, setzt man sie $= Q'$, so ergibt sich wieder

$$\frac{Q' + P}{w} = -(w^{m-2} + Aw^{m-3} + \ldots + Nw + O),$$

bezeichnet man diese ganze Zahl mit P', so folgt weiter $\frac{P' + O}{w} = -(w^{m-3} + Aw^{m-4} + \ldots + N)$ einer ganzen Zahl gleich; setzt man nun

$$\frac{P'+O}{w}=O',\ \frac{O'+N}{w}=N' \text{ u. s. f.}$$

$\frac{C'+B}{w}=B'$, $\frac{B'+A}{w}=A'$; so überzeugt man sich leicht daß auch $O', N' \ldots B', A'$ ganze Zahlen sein müssen: nun ist

$$Q'=\frac{Q}{w},\ P'=\frac{Q'+P}{w}=\frac{Q}{w^2}+\frac{P}{w}$$

$$O'=\frac{P'+O}{w}=\frac{Q}{w^3}+\frac{P}{w^2}+\frac{O}{w}$$

$$N'=\frac{O'+N}{w}=\frac{Q}{w^4}+\frac{P}{w^3}+\frac{O}{w^2}+\frac{N}{w}, \text{ also allgemein}$$

$$B'=\frac{Q}{w^{m-1}}+\frac{P}{w^{m-2}}+\frac{O}{w^{m-3}}+\ldots+\frac{B}{w}, \text{ und}$$

$$A'=\frac{B'+A}{w}=\frac{Q}{w^m}+\frac{P}{w^{m-1}}+\ldots+\frac{B}{w^2}+\frac{A}{w}:$$

multiplizirt man beide Theile dieses Ausdrucks mit w^m so wird

$$A'w^m=Aw^{m-1}+Bw^{m-2}+\ldots+Pw+Q.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung

$$w^m+Aw^{m-1}+Bw^{m-2}+\ldots Ow^2+Pw+Q=0$$

so folgt $w^m+A'w^m=0$, oder $A'=-1$.

169. Hierauf gründet sich ein einfaches Verfahren die Wurzeln einer gegebenen Gleichung, welche ganze Zahlen sind, zu finden. Man zerlege das letzte Glied derselben in seine einfachen und zusammengesetzten Faktoren, und stelle diejenigen derselben, die nicht größer sind als die größte positive Wurzel der Gleichung (164) mit dem Zeichen +, hingegen jene Theiler die die größte negative Wurzel nicht übersteigen (166) mit dem Zeichen — in eine Reihe, es wäre denn, daß ein ununterbrochener Zeichenwechsel in der Gleichung auf den

Mangel negativer Wurzeln hindeutete. Unter jeden Divisor schreibe man den Quotienten, welchen das letzte Glied der Gleichung durch ihn getheilt gibt, hierunter setze man die Resultate der Addition jedes Quotienten zu dem Koeffizienten im vorletzten Gliede der Gleichung, und dividire sie durch den ihnen entsprechenden Divisor, vereinige diese Quotienten mit dem Koeffizienten des drittletzten Gliedes der Gleichung u. s. f. Sobald eine der zu verrichtenden Divisionen nicht aufgeht, wird der betreffende Divisor nicht weiter berücksichtiget, denn er ist gewiß keine Wurzel der Gleichung (168). Kann aber die Operation so lange fortgesetzt werden, bis sämmtliche Koeffizienten der Gleichung an die Reihe gekommen sind, und ist der letzte Quotient -1, so ist der zugehörige Divisor eine Wurzel der Gleichung. Hat man hienach nicht so viele Wurzeln gefunden, als der Grad der Gleichung anzeigt, so untersuche man noch, ob eine der bereits gefundenen Wurzeln nicht mehrere Mahle der Gleichung angehört, und dividire die Gleichung durch die gefundenen Wurzelfaktoren; erhält man dadurch eine Gleichung vom zweiten Grade, so sind auch diese Wurzeln bekannt. Z. B. Sei $x^5+5x^4+2x^3-17x^2-21x-18=0$ die Theiler von 18 sind: 2, 3, 6, 9, 18, und die Grenzen der Wurzeln findet man nach (164) und (166) $+3$, -5; daher

$+2$	$+3$	-2	-3
-9	-6	$+9$	$+6$
-30	-27	-12	-15
-15	-9	$+6$	$+5$
-32	-26	-11	-12
-16			$+4$
-14			$+6$
-7			-2
-2			$+3$
-1			-1

es sind sonach $+2$ und -3 die Wurzeln der Gleichung

und da in derselben das Glied $-21x$ durch 3, und das letzte Glied -18 durch 9 theilbar ist, so kann -3 eine doppelte Wurzel der Gleichung sein. Dividirt man nun dieselbe durch $(x-2)(x+3)^2 = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$, so erhält man $x^2 + x + 1 = 0$, deren Wurzeln $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ sind.

170. Sei $fx = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q) = o$, und α, α' zwei um eine Einheit unterschiedene ganze Zahlen, zwischen welche die positive Wurzel a der Gleichung gelegen ist, nämlich es sei
$\alpha < a$, aber $\alpha' = \alpha + 1 > a$, so wird
$f\alpha = (\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c)\ldots(\alpha - p)(\alpha - q)$, und
$f\alpha' = (\alpha' - a)(\alpha' - b)(\alpha' - c)\ldots(\alpha' - p)(\alpha' - q)$.
Sind nun die Produkte $(\alpha - b)(\alpha - c)\ldots(\alpha - p)(\alpha - q)$ und $(\alpha' - b)(\alpha' - c)\ldots(\alpha' - p)(\alpha' - q)$ mit gleichen Vorzeichen behaftet, oder was einerlei ist, sind die übrigen Faktoren der Gleichung zugleich positiv oder negativ; so erhalten die Ausdrücke $f\alpha$, $f\alpha'$ entgegengesetzte Zeichen. Man nehme nun an, es sei nebstdem auch $\alpha < b$, und $\alpha' > b$, so wird, wenn keine andere Wurzeln zwischen α und α' fallen, $\alpha - a$, und $\alpha - b$ zugleich negativ, so wie $\alpha' - a$, und $\alpha' - b$ positiv, mithin werden die Vorzeichen in $f\alpha$, und $f\alpha'$ übereinstimmen. Ist überhaupt die Zahl der zwischen α und $\alpha + 1$ fallenden Wurzeln gerade, so erhalten die Ausdrücke $f\alpha$ und $f\alpha'$ immer gleiche Zeichen, hingegen entgegensetzte Zeichen, wenn jene Zahl ungerade ist.

171. Setzt man daher in einer Gleichung $fx = o$, statt x nach und nach die ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ bis sich nicht zwei Resultate mit entgegengesetzten Zeichen darbiethen, so erhält man zwei um Eins unterschiedene Zahlen α und α', zwischen welche eine positive Wurzel der Gleichung gelegen ist: nimmt man das arithmeti-

sche Mittel derselben $\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') = m$ als den Näherungswerth der Wurzel, und setzt $x = m + y$, so kann y nur klein sein, und man kann dessen zweite und höhere Potenzen außer Acht lassen; hiedurch verwandelt sich die vorgelegte Gleichung in eine andere von der Form $A + By = 0$, aus welcher sich y, und dadurch ein zweiter mehr genäherter Werth von x ergibt: setzt man diesen $= m'$, und $x = m' + y'$, so gibt die Gleichung $fx = 0$ für diesen Werth von x, eine Gleichung $A' + B'y' = 0$, woraus so fort ein noch mehr genäherter Werth für x hervorgeht. Sei z. B.

$x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = 0$: für $x = 5$, und $x = 6$ gibt diese Gleichung beziehungsweise die Resultate $+75$ und -74, es muß also zwischen diesen Werthen eine Wurzel der Gleichung liegen: setzt man $x = 5.5 + y$, so wird $x^3 = 166.4$; $10x^2 = 302.5$; $130x = 715 + 130y$, also hat man

$166.4 - 302.5 - 715 + 850 - 130y = -1.1 - 130y = 0$,

daher $y = -0.0084$, und $x = 5.5 - 0.0084 = 5.492 + y'$; verfährt man wieder so, so findet man $y' = 0.0004648$, daher $x = 5.4924648$ u. s. f.

Eben so findet man für die Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$, da $x = 2$, $x = 3$ die Resultate -1 und $+16$ geben, also die Wurzel weit näher an 2 liegt, wenn man $x = 2.1$ setzt, $y = -0.0054$, woraus $x = 2.0946$ entsteht, und hiedurch ergibt sich auf gleiche Weise ein zweiter Näherungswerth $x = 2.09455149$. Vergl. B. I. 223.

VIII. Transformation der Gleichungen.

172. Jede Gleichung läßt sich in eine andere verwandeln, deren Wurzeln das Vielfache der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Soll die Gleichung 212) in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln

$y = kx$ sind, so wird $x = \frac{y}{k}$, also

$$f\frac{y}{k} = \frac{y^m}{k^m} + \frac{Ay^{m-1}}{k^{m-1}} + \frac{By^{m-2}}{k^{m-2}} + \ldots + \frac{Py}{k} + Q = 0$$

oder mit k^m multiplizirt.

$fy = y^m + Aky^{m-1} + Bk^2y^{m-2} + \ldots Pk^{m-1}y + Qk^m = 0$ 215)

welche Gleichung die verlangte Eigenschaft besitzt. Sie entsteht aus der gegebenen 212), wenn man die Glieder derselben, der Reihe nach, mit den Gliedern der geometrischen Reihe $k, k^2, k^3 \ldots k^m$ multiplizirt, und x mit y vertauscht: nur muß man hierbei für jedes fehlende Glied der Gleichung 212) auch das zugehörige Glied der Reihe weglassen.

173. Mittelst dieser Transformation kann man den Koeffizienten des ersten Gliedes einer Gleichung, wenn er von der Einheit verschieden ist, wegschaffen. Zu diesem Ende nehme man k diesem Koeffizienten gleich an, so werden alle Glieder der transformirten Gleichung durch k theilbar, und man erhält nach Wegschaffung des gemeinschaftlichen Faktors, aus 215)

$y^m + Ay^{m-1} + Bky^{m-2} + \ldots + Pk^{m-2}y + Qk^{m-1} = 0$

So ergibt sich z. B. aus der Gleichung

$2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0$ die folgende $y^3 - 3y^2 - 8y + 20 = 0$.

Man kann auf gleiche Weise eine Gleichung, deren Koeffizienten beziehungsweise $k, k^2, k^3 \ldots k^m$ als Faktoren enthalten, einfacher machen, wenn man in 215) $\frac{1}{k}$ statt k, also $y = \frac{x}{k}$ setzt. Z. B. Die Gleichung

$x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, verwandelt sich für $k = 2$ in $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, deren Wurzeln durchgängig die Hälften der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind.

174. Hat eine Gleichung gebrochene Koeffizienten, so werden sie weggeschafft, wenn man k der kleinsten durch alle Nenner theilbaren Zahl gleich setzt. Z. B. für $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 5 = 0$, mache man $k = 6$, so wird hieraus $y^3 - 21y^2 + 12y - 1080 = 0$.

Auf diese Art lassen sich bisweilen auch Irrationalzahlen aus den Koeffizienten einer Gleichung wegschaffen. Z. B. In der Gleichung $x^4 + 7\sqrt{2}x^3 - 10\sqrt{8}x + 5 = 0$ setze man $k = \sqrt{2}$, so wird

die zugehörige Reihe 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4

und man erhält $y^4 + 14y^3 - 40y + 20 = 0$

175. Jede Gleichung läßt sich in eine andere von eben demselben Grade verwandeln, deren Wurzeln um irgend eine Größe h von den Wurzeln der gegebenen Gleichung verschieden sind. Soll die Gleichung 212) in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln um h kleiner sind, also $y = x - h$ ist, so wird hienach

$x = y + h$, und

$$fy = (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2} + \ldots + P(y+h) + Q = 0$$

oder wenn man die Binomien entwickelt, und nach y ordnet:

$$fy = y^m + [\binom{m}{1}h + A]y^{m-1} + [\binom{m}{2}h^2 + \binom{m-1}{1}Ah + B]y^{m-2} + [\binom{m}{3}h^3 + \binom{m-1}{2}Ah^2 + \binom{m-2}{1}Bh + C]y^{m-3} + \ldots + h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + \ldots + Ph + Q = 0 \quad 216)$$

Man erhält daher aus der gegebenen Gleichung $fx = 0$, eine andere

$fy = y^m + A'y^{m-1} + B'y^{m-2} + \ldots P'y + Q' = 0$

deren Wurzeln sämmtlich um die Größe h kleiner sind als die Wurzeln in $fx = 0$, hiebei ist

$A' = mh + A$, $B' = \binom{m}{2}h^2 + \binom{m-1}{1}Ah + B$,

$C' = \binom{m}{3}h^3 + \binom{m-1}{2}Ah^2 + \binom{m-2}{1}Bh + C$, u. s. f., endlich

$Q' = h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + \ldots + Ph + Q = 0$

nämlich $Q' = fh$, und wenn man $A + mh = o$ setzt, wird $h = -A : m$; es folgt also das letzte Glied der verwandelten Gleichung, deren Wurzeln um h kleiner sind, als in der vorgelegten Gleichung, wenn man in der letzteren h statt x setzt, und in der neuen Gleichung wird das zweite Glied fehlen, wenn man h gleich dem ersten Koeffizienten mit entgegengesetzten Zeichen durch den Ordnungsexponenten getheilt nimmt. Sollen die Wurzeln der Gleichung $fx = o$, um h vergrößert werden, so ist $y = x + h$ zu setzen: dieß gibt $x = y - h$, und man hätte im Ausdrucke fy in den Gliedern mit den ungeraden Potenzen von h das Vorzeichen zu ändern.

176. Für $h = 1$ verwandeln sich obige Koeffizienten wie folgt:

$A' = A + m, B' = B + (m-1)A + \frac{1}{2}m(m-1)$

$C' = C + (m-2)B + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)A + \frac{1}{3}m(m-1)(m-2)$

u. s. f. man kann sie aber durch eine einfache Rechnung bestimmen, wenn man die Koeffizienten der gegebenen Gleichung in eine Reihe schreibt, und hierauf die erste Zahl zur zweiten, und die Summe zur dritten Zahl u. s. f. addirt, und die Ergebnisse in einer zweiten Reihe schreibt, bis man zur letzten Zahl gekommen ist, so ist das Resultat das letzte Glied der transformirten Gleichung: ferner verfahre man auf gleiche Weise mit den Gliedern der eben entstandenen Reihe mit Ausschluß des letzten Gliedes, so ist das Resultat der Koeffizient des vorletzten Gliedes, und aus dieser zweiten Reihe ergibt sich auf gleiche Weise der drittletzte Koeffizient u. s. w. Um z. B. aus der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 23x^2 + 33x - 22 = o$ die verwandelte Gleichung für die Wurzel $x - 1$ abzu-

leiten, hat man

und es ist dieselbe:

$$(x-1)^4+8(x-1)^3-5(x-1)^2+3(x-1)-7=0$$

$$\begin{array}{r} 1+4-23+33-21 \\ \hline 1+5-18+15-7 \\ 1+6-12+3 \\ 1+7-5 \\ 1+8 \end{array}$$

Hieraus findet sich nun weiter die verwandelte Gleichung für $x-2$, für $x-3$ u. s. f.

Koeffizienten für $x-1$: $\begin{array}{r} 1+8-5+3-7 \\ \hline 1+9+4+7+0 \\ 1+10+14+21 \\ 1+11+25 \end{array}$

Koeffizienten für $x-2$: $\begin{array}{r} 1+12+25+21+0 \\ \hline 1+13+38+59+59 \\ 1+14+52+111 \\ 1+15+67 \end{array}$

Koeffizienten für $x-3$: $1+16+67+111+59$ u. s. f.

177. Da die positiven Wurzeln einer Gleichung negativ werden, wenn man die Vorzeichen jedes geraden Gliedes ändert; so werden in der so verwandelten Gleichung durch dieses Verfahren die negativen Wurzeln vergrößert, mithin erscheinen, wenn man hierauf die Vorzeichen der geraden Glieder wieder abändert, auch die positiven Wurzeln vergrößert. Z. B. Aus

$x^3-6x^2-5x+7=0$ folgt: $\begin{array}{r} 1+6-5-7 \\ \hline 1+7+2-5 \\ 1+8+10 \end{array}$

Koeffizienten für $x+1$: $\begin{array}{r} 1+9+10-5 \\ \hline 1+10+20+15 \\ 1+11+31 \end{array}$

Koeffizienten für $x+2$: $\begin{array}{r} 1+12+31+15 \\ \hline 1+13+44+59 \\ 1+14+58 \end{array}$

Koeffizienten für $x+3$: $1+15+58+59$ u. s. f.

Man hat also: $(x+1)^5 - 9(x+1)^2 + 10(x+1) + 5 = 0$
$(x+2)^5 - 12(x+2)^2 + 31(x+2) - 15 = 0$
$(x+3)^5 - 15(x+3)^2 + 58(x+3) - 59 = 0$

178. Man kann sich dieser Transformation mit Nutzen bedienen, wenn das letzte Glied einer Gleichung $fx = 0$ ein Produkt vieler Faktoren wäre: da alsdann die Anzahl der zu prüfenden Divisoren ungemein groß ausfällt, so suche man eine Zahl h, für welche die verwandelte Gleichung, ein letztes Glied fh gibt, das nur aus wenigen Faktoren besteht: hat man eine solche Zahl gefunden, so kann man die für $x - h = y$ transformirte Gleichung leichter auflösen als die vorgelegte, und die gefundenen um h vergrößerten Wurzeln, werden auch der Gleichung $fx = 0$ Genüge leisten: oder aber man vergrößere die Divisoren von fh beziehungsweise um h, und unterziehe diejenigen unter ihnen der Rechnung, (169) welche zugleich Theiler des letzten Gliedes in $fx = 0$ sind. Z. B. Sei die Gleichung gegeben
$x^4 - 4x^3 - 43x^2 + 58x + 240 = 0$: die Grenzen ihrer Wurzeln sind $+44$ und -9: die Faktoren von 240 sind aber 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40; macht man $h = 1$, so ergibt sich $fh = 252 = 2^2 . 3^2 . 7$, wovon die Faktoren
2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36 . . .
sind: vergrößert man diese sämmtlich um 1, so erhält man folgende der vorhergehenden Reihe gemeinschaftliche Faktoren 3, 4, 5, 8, 10, 15. Man findet nach (169) daß $+3$, $+8$, -2, -5 die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

179. Die Gleichung 215) gibt, wenn man $\frac{1}{k}$ statt k setzt,

$$fy = y^m + \frac{A}{k}y^{m-1} + \frac{B}{k^2}y^{m-2} + \ldots \frac{Q}{k^m} = 0$$

und man kann nach (176) aus den Koeffizienten

$1, \frac{A}{k}, \frac{B}{k^2}, \ldots \frac{Q}{k^m}$, die Koeffizienten $1, A', B', \ldots$

für die Gleichung $f(y-1), f(y-2), \ldots$ bestimmen.

Setzt man hierin $y = \frac{x}{k}$, also $y - 1 = \frac{x-k}{k}$,

$y - 2 = \frac{x-2k}{k}$ u. s. f. und multiplizirt dann mit k^m,

so findet man

$$(x-k)^m + kA'(x-k)^{m-1} + k^2B'(x-k)^{m-2} + \ldots k^mQ' = 0$$
$$(x-2k)^m + kA'(x-2k)^{m-1} + k^2B'(x-2k)^{m-2} + \ldots k^mQ' = 0.$$

Um also aus der Gleichung 212) $fx = 0$, eine Gleichung für $f(x-k), f(x-2k) \ldots$ abzuleiten, so suche man aus den Koeffizienten $1, \frac{A}{k}, \frac{B}{k^2}, \ldots \frac{Q}{k^m}$ nach (176) die nächstfolgenden Koeffizienten $1, A', B', \ldots Q'$ und multiplizire sie mit den Gliedern der geometrischen Reihe $1, k, k^2 \ldots k^m$, wodurch die Glieder $1, kA', k^2B' \ldots k^mQ'$ entstehen, so erhält man dadurch die gesuchten Gleichungen. Setzt man nun $x-k=x'$, und r statt k, so kann man eben so weiter die Koeffizienten für $x-k-r, x-k-2r, \ldots$ finden. Ist endlich die verwandelte Gleichung für

$x - k - \frac{1}{r}, x - k - \frac{2}{r} \ldots$ zu bestimmen, so braucht man nur statt mit r zu dividiren damit zu multipliziren, und umgekehrt. Z. B. Aus der Gleichung $x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$, die verwandelten Gleichungen für $x - 100, x - 200 \ldots$ zu finden, setze man $k = 100$, so wird

$$\begin{array}{l} 1-0.04+\ 0.0003-0.000006 \\ \hline 1+0.96+\ 0.9603+0.960294 \\ 1+1.96+\ 2.9203 \\ \hline 1+2.96+\ 2.9203+0.960294 \\ \hline 1+3.96+\ 6.8803+7.840594 \\ 1+4.96+11.8403 \\ 1+5.96+11.8403+7.840594 \text{ u. s. f.} \end{array}$$

mithin hat man

$(x-100)^3+296(x-100)^2+29203(x-100)+960294=0$
$(x-200)^3+596(x-200)^2+118403(x-200)+7840594=0$

u. s. f. Setzt man nun $x=10$, und dividirt die Zahlen 1,596,118403,7840594 durch die auf einander folgenden Potenzen von 10, so wird

$$\begin{array}{l} 1+59.6+1184.03+\ 7840.594 \\ \hline 1+60.6+1244.63+\ 9085.224 \\ 1+61.6+1306.23 \\ \hline 1+62.6+1306.23+\ 9085.224 \\ \hline 1+63.6+1369.83+10455.054 \\ 1+64.6+1434.43 \\ 1+65.6+1434.43+10455.054 \text{ u. s. f.} \end{array}$$

woraus folgt:

$(x-210)^3+626(x-210)^2+130623(x-210)+9085224=0$
$(x-220)^3+656(x-220)^2+143443(x-220)+10455054=0$

und hieraus findet man nach (176)

$(x-221)^3+659(x-221)^2+144758(x-221)+10599154=0$

u. s. f. Aus der Gleichung $x^3-7x-7=0$ ergibt sich nach (176) die verwandelte

$(x-3)^3+9(x-3)^2+20(x-3)-1=0$: will man nun hieraus die Gleichung für $x-3.01$, $x-3.02$ . . . ableiten, so setze man $x=100$, und man erhält, wenn man erstlich diese Koeffizienten mit den Potenzen von 100 multiplizirt

$$1 + 900 + 200000 - 1000000$$
$$1 + 901 + 200901 - 799099$$
$$1 + 902 + 201803$$
$$1 + 903 + 201803 - 799099$$
$$1 + 904 + 202707 - 596392$$
$$1 + 905 + 203612$$
$$1 + 906 + 203612 - 596392 \text{ u. s. f.}$$

und dann die eben gefundenen Koeffizienten mit den Potenzen von 100 dividirt,

$$(x-3.01)^3 + 9.03(x-3.01)^2 + 20.1803(x-3.01) - 0.799099 = 0$$
$$(x-3.02)^3 + 9.06(x-3.02)^2 + 20.3612(x-3.02) - 0.596392 = 0$$

180. Man kann dieses Verfahren bei Aufsuchung der irrationalen Wurzeln einer Gleichung mit Vortheil anwenden. Man bestimme nämlich aus der gegebenen Gleichung $fx = 0$, die verwandelten für $x-1$, $x-2$, $x-3$ ... oder wenn sich übersehen läßt, daß die Wurzeln große Zahlen sein müssen, so suche man die Koeffizienten der Gleichung $f(x-20), f(x-30), \ldots$ oder auch $f(x-100), f(x-200), \ldots$ und bemerke diejenigen letzten Glieder, deren Zeichen abwechseln: geschieht dieses in den Gleichungen $f(x-\alpha)$, und $f(x-\alpha')$; so muß zwischen α und α' eine positive Wurzel der Gleichung liegen (170), und man hat zugleich einen Näherungswerth in ganzen Zahlen gefunden: aus diesem lassen sich mittelst (179) die Zehntel, Hundertel, Tausendstel derselben bestimmen. Sind nun die Werthe α und α' für die dazwischen liegende Wurzel hinreichend nahe bekannt, so sei der Werth der Gleichung für $x = \alpha$, oder $f\alpha = A$, und $f\alpha' = -A'$, und man bezeichne mit β einen noch mehr genäherten Werth der Wurzel oder es sei $\beta > \alpha$, und $\beta < \alpha'$, so sind $\beta - \alpha$, und $\alpha' - \beta$ die

Abweichungen vom Näherungswerthe der Wurzel, zu welchen die Reste A und A′ ohne Rücksicht auf die Vorzeichen gehören, und welche offenbar mit A′ und A abnehmen, daher näherungsweise denselben proportional gesetzt werden können; man hat also

$$A : A' = \beta - \alpha : \alpha' - \beta \text{ oder}$$

$$A + A' : A = \alpha' - \alpha : \beta - \alpha, \text{ also } \beta = \frac{A(\alpha' - \alpha)}{A + A'} + \alpha$$

Zur Auffindung der Näherungswerthe für die negativen Wurzeln einer Gleichung, verändere man die Vorzeichen ihrer geraden Glieder, und suche dann, wie so eben gezeigt wurde, die Näherungswerthe der positiven Wurzeln dieser verwandelten Gleichung, so sind solche zugleich die Näherungswerthe der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

181. Wir wollen nun noch den Quotienten entwickeln, den eine Gleichung $fx = 0$ 212) gibt, wenn sie durch den Wurzelfaktor $x - w$ dividirt wird, man setze also

$$\frac{fx}{x-w} = x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \ldots N'x^2 + O'x + P' = 0$$

und multiplizire beiderseits mit $x - w$, so erhält man leicht

$$fx = x^m + (A' - w)x^{m-1} + (B' - A'w)x^{m-2} + (C' - B'w)x^{m-3} + \ldots + (O' - N'w)x^2 + (P' - Ow)x - P'w = 0$$

setzt man nun statt fx dessen Werth 212), so folgt

$A = A' - w$: dieß gibt $A' = w + A$

$B = B' - A'w$ $\quad B' = A'w + B = w^2 + Aw + B$

$C = C' - B'w$ u. s. f. $\quad C' = w^3 + Aw^2 + Bw + C$

sei allgemein der $m - 2$te Koeffizient

$$O' = w^{m-2} + Aw^{m-3} + Bw^{m-4} + \ldots Nw + O,$$

so wird wegen $P = P' - O'w$, der Werth von

$$P' = w^{m-1} + Aw^{m-2} + Bw^{m-3} + \ldots + Nw^2 + Ow + P$$

und man sieht, daß dieses Glied das letzte im Quotienten sei, weil das folgende Glied nothwendig den Werth $w^m + Aw^{m-1} + Bw^{m-2} + \ldots + Pw + Q$ hätte, welchen man auch erhält, wenn man in 212) $x = w$ setzt, und der, weil w eine Wurzel der Gleichung $fx = o$ ist, in Null übergeht.

182. Gleichungen, deren vom Anfange und Ende derselben gleich weit entfernte Koeffizienten sämmtlich einander gleich sind, heißen reziproke Gleichungen. Ihre allgemeine Form ist:

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Bx^2 + Ax + 1 = o$

Ist m eine ungerade Zahl, so entspricht nach (160) der Gleichung nothwendig die Wurzel -1, und man kann sie durch die Division mit dem Wurzelfaktor $x + 1$ auf einen um eine Einheit niedrigeren Grad bringen. Wendet man hier die in (181) enthaltenen Werthe der Koeffizienten $A', B', C' \ldots O', P'$ an, so findet man, wegen $w = -1$,

$A' = -1 + A, B' = 1 - A + B, C' = -1 + A - B + C$, u. s. f.

$O' = -1 + A - B + C \ldots - N + O$, allein N und O sind in einer reziproken Gleichung den Größen C und B beziehungsweise gleich, mithin ist

$O' = -1 + A$, endlich

$P' = 1 - A + B - C \ldots + N - O + P$, und aus demselben Grunde $P' = 1$. Hiernach ist der gesuchte Quotient $x^{m-1} - (1 - A)x^{m-2} + (1 - A + B)x^{m-3} \ldots$

$+ (1 - A + B)x^2 - (1 - A)x + 1 = o$

eine ebenfalls reziproke Gleichung einer geraden Ordnung.

183. Drückt man diesen Quotienten durch

$x^{2n} + A'x^{2n-1} + B'x^{2n-2} + \ldots$

$+ K'x^{n+1} + L'x^n + K'x^{n-1} + \ldots + B'x^2 + A'x + 1 = o$

aus, dividirt dann sämmtliche Glieder durch x^n, und vereiniget je zwei vom Anfange und Ende der Gleichung

gleich weit abstehende Glieder zusammen, so erhält man

$$x^n+x^{-n}+A'[x^{n-1}+x^{-(n-1)}]+B'[x^{n-2}+x^{-(n-2)}]+\ldots$$
$$+K'[x+x^{-1}]+L'=0$$

Man setze $x+x^{-1}=y$, so hat man, weil allgemein, $[x^r+x^{-r}]y=x^{r+1}+x^{-(r+1)}+x^{r-1}+x^{-(r-1)}$, oder $x^{r+1}+x^{-(r+1)}=[x^r+x^{-r}]y-[x^{r-1}+x^{-(r-1)}]$ ist, 217)

$x^2+x^{-2}=y^2-2$
$x^3+x^{-3}=(y^2-2)y-y=y^3-3y$
$x^4+x^{-4}=(y^3-3y)y-(y^2-2)=y^4-4y^2+2$,

u. s. f. und man ist sonach im Stande die Summe x^r+x^{-r} für jeden ganzen positiven Werth r durch eine Funktion von y auszudrücken. Gibt nun x^r+x^{-r} eine Funktion von y des rten Grades, so zeigt die Gleichung 217) daß $x^{r+1}+x^{-(r+1)}$ eine Funktion von y des $(r+1)$ten Grades sei; es ist aber, $r=4$ gesetzt, für x^4+x^{-4} die Funktion von y des vierten Grades, folglich wird für x^5+x^{-5} die Funktion von y des fünften Grades, und allgemein für x^n+x^{-n} eine Funktion von y des nten Grades hervorgehen. Hiedurch verwandelt sich jede reziproke Gleichung des $(2n+1)$ten Grades in

$$y^n+A'y^{n-1}+B'y^{n-2}+\ldots+K'y+L'=0$$

welches eine Gleichung des nten Grades ist.

184. Wäre demnach die Gleichung gegeben

$$x^5+Ax^4+Bx^3+Bx^2+Ax+1=0$$

so könnte man sie erstlich durch die Division mit dem Wurzelfaktor $x+1$ auf die Gleichung

$x^4+A'x^3+B'x^2+A'x+1=0$, und diese hierauf durch die Substitution von $x+x^{-1}=y$, auf die Form $y^2+A'y+B'-2$ bringen. Sind nun α, β die beiden Wurzeln dieser Gleichung, oder

$$\alpha=-\tfrac{1}{2}A'+\sqrt{(\tfrac{1}{4}A'^2-B'+2)},\ \beta=-\tfrac{1}{2}A'-\sqrt{(\tfrac{1}{4}A'^2-B'+2)}$$

so erhält man, wegen $y = x + x^{-1}$ oder $x^2 - yx + 1 = 0$

$$x = \tfrac{1}{2} y \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} y^2 - 1)}$$

und hieraus die 5 Wurzeln der gegebenen Gleichung

$\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 - 1)}$, $\frac{1}{2}\beta \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\beta^2 - 1)}$, und -1.

IX. Der Kotesische Lehrsatz.

185. Gleichungen von der Form $x^m \pm A = 0$, nennt man reine Gleichungen des mten Grades, ihre Wurzeln lassen sich auf folgende Art bestimmen: man setze um Brucherponenten zu vermeiden $A = a^m$, und es sei m eine gerade Zahl $= 2n$, so enthält die Gleichung $x^{2n} + a^{2n} = 0$ lauter unmögliche Wurzeln, wie $p \pm q\sqrt{-1}$; nimmt man aber α so, daß $p = R\cos\alpha$, $q = R\sin\alpha$ sei, so wird $R = \sqrt{(p^2 + q^2)}$ eine reelle Größe, und durch Umkehrung der Gleichung $p = R\cos\alpha$, folgt $\alpha = \text{arc.cos}\,\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$, also ist auch α immer möglich, weil der Bruch $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$ die Einheit nie übersteigt. Mit Hülfe dieser Transformationen wird jede Wurzel obiger Gleichung

$x = p \pm q\sqrt{-1} = R(\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1})$, und hieraus folgt so fort

$x^m = R^m(\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1})^m = R^m(\cos m\alpha \pm \sin m\alpha\sqrt{-1})$

Setzt man diesen Werth einmahl mit dem oberen Zeichen, und dann mit dem unteren Zeichen in die obige Gleichung $x^m + a^m = 0$, so erhält man

$a^m + R^m(\cos m\alpha + \sin m\alpha\sqrt{-1}) = 0$, und

$a^m + R^m(\cos m\alpha - \sin m\alpha\sqrt{-1}) = 0$

deren Summe

$a^m + R^m \cos m\alpha$, also $\cos m\alpha = -\frac{a^m}{R^m}$ . . . λ)

die Differenz aber $sin\, m\alpha = 0$ . . . μ) gibt; es ist daher die Größe α so zu bestimmen, daß für R ein reeller Werth zum Vorschein kommt, und nebstdem die Gleichungen λ) und μ) bestehen: nun gibt die Gleichung λ) für R den Werth $\sqrt[m]{-\frac{a^m}{cos\, m\alpha}}$, welcher für ein gerades m reell wird, wenn $cos\, m\alpha$ negativ ist, die Gleichung μ) verlangt aber, daß $m\alpha$ ein Vielfaches von π sei, weil überhaupt $sin\, r\pi = 0$ ist: da nun die Kosinusse der geraden Vielfachen von π gleich $+1$ sind, so muß r eine ungerade Zahl $2k+1$ bedeuten; man hat daher

$m\alpha = (2k+1)\pi$ zu setzen, dieß gibt $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{m}$ . . . ν)

und für diesen Werth von α, wird $R = \sqrt[m]{\frac{-a^m}{-1}} = a$,

setzt man diese Werthe statt α und R, im Ausdrucke von x, so erhält man die allgemeine Form der Wurzeln einer jeden Gleichung $x^m + a^m = 0$ oder

$$x = a\left(cos\frac{2k+1}{m}\pi \pm sin\frac{2k+1}{m}\pi.\sqrt{-1}\right) \ldots 218)$$

186. Wenn gleich die Wurzelfaktoren einzeln in einer imaginären Form enthalten sind, so kann doch das Produkt der je zwei zusammengehörenden Wurzelfaktoren reell werden, ein solches Produkt gibt nun einen sogenannten dreitheiligen oder quadratischen Faktor der gegebenen Gleichung, man findet ihn, wenn man die obigen Werthe von $x-(p+q\sqrt{-1})$ und $x-(p-q\sqrt{-1})$ mit einander multiplizirt, nämlich

$$x^2 - 2Rx\, cos\alpha + R^2 = x^2 - 2ax\, cos\frac{2k+1}{m}\pi + a^2$$

deren Anzahl, wenn $m = 2n$ bedeutet, gleich n ist, wenn aber $m = 2n+1$ ungerade ist, so enthält die

Gleichung außer den n quadratischen Faktoren, noch den einfachen Wurzelfaktor $x+a$.

187. Sei nun die Gleichung $x^m - a^m = o$ gegeben, so ist in der Gleichung $\lambda)$ $-a^m$ statt a^m zu setzen, wodurch der zugehörige Werth von R in $\sqrt[m]{\frac{a^m}{\cos m\alpha}}$ übergeht; es darf daher in diesem Falle $\cos m\alpha$ nicht negativ sein, mithin ist mit Rücksicht auf die Gleichung $\mu)$ $m\alpha = 2k\pi$ zu setzen. Hieraus folgt $\alpha = \frac{2k\pi}{m}$, $R = a$, und die allgemeine Form der Wurzeln dieser Gleichung wird $x = a\left(\cos\frac{2k}{m}\pi \pm \sin\frac{2k}{m}\pi \cdot \sqrt{-1}\right)$, ferner sind die 219) quadratischen Faktoren derselben in der Gleichung $x^2 - 2ax\cos\frac{2k}{m} + a^2$ enthalten, wozu wenn m ungerade ist der Faktor $x-a$, und wenn m gerade ist, überdieß statt des quadratischen Faktors bloß $x+a$ hinzukommt. Der vorstehende Satz, nach welchem man die Faktoren des Ausdrucks $x^m \pm a^m$ angeben kann, heißt nach seinem Erfinder Cotes der Kotesische Lehrsatz.

188. Wird dieß auf besondere Fälle angewandt, indem man nach einander 0, 1, 2, 3 ... bis $\frac{1}{2}m$, wenn m gerade, oder aber bis $\frac{1}{2}(m-1)$ wenn m ungerade ist, statt k setzt, ferner m stuffenweise 3, 4, 5 ... sein läßt; so findet man

$x^2+a^2 = (x^2 - 2ax\cos\frac{1}{3}\pi + a^2)(x+a)$, aber wegen $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$

$= (x^2 - ax + a^2)(x+a)$

$x^4+a^4 = (x^2 - 2ax\cos\frac{1}{4}\pi + a^2)(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{4}\pi + a^2)$

$= (x^2 - ax\sqrt{2} + a^2)(x^2 + ax\sqrt{2} + a^2)$, wegen $\cos\frac{1}{4}\pi = -\cos\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x^5+a^5 = (x^2 - 2ax\cos\frac{1}{5}\pi + a^2)(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{5}\pi + a^2)(x+a)$

$x^6+a^6 = (x^2 - 2ax\cos\frac{1}{6}\pi + a^2)(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{6}\pi + a^2) \times (x^2 - 2ax\cos\frac{5}{6}\pi + a^2)$

$= (x^2 - ax\sqrt{3} + a^2)(x^2 + a^2)(x^2 + ax\sqrt{3} + a^2)$ u. s. f.

Ferner erhält man

$x^3-a^3=(x^2-2ax\cos\frac{2}{3}\pi+a^2)(x-a)$
$=(x^2+ax+a)(x-a)$
$x^4-a^4=(x^2-2ax\cos\frac{2}{4}\pi+a^2)(x-a)(x+a)$
$=(x^2+a^2)(x^2-a^2)$
$x^5-a^5=(x^2-2ax\cos\frac{2}{5}\pi+a^2)(x^2-2ax\cos\frac{4}{5}\pi+a^2)(x-a)$
$x^6-a^6=(x^2-2ax\cos\frac{2}{6}\pi+a^2)(x^2-2ax\cos\frac{4}{6}\pi+a^2)(x-a)\times(x+a)$
$=(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)(x^2-a^2)$. u. ſ. f.

189. Es iſt nun auch leicht die m Wurzeln des Ausdruckes $\sqrt[m]{\pm 1}$ anzugeben, wenn man im Ausdrucke $x^m \pm a^m = 0$ $a=1$ ſein läßt. Frägt man z. B. nach den Werthen von $\sqrt[3]{-1}$, ſo ſetze man in 218) $a=1$, $m=3$, und ſtatt k, 0, 1, und man erhält $x=\cos\frac{1}{3}\pi \pm \sin\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}$, und wegen $\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, wird $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, daher ſind die geſuchten Werthe: $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$, und -1. Eben ſo ergibt ſich für $\sqrt[4]{-1}$, $+\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})$, $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})$, $+\frac{1}{2}(1-\sqrt{-1})$, und $-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-1})$, u. ſ. f.

X. Gleichungen des zweiten, dritten, und vierten Grades.

190. Die allgemeine Form einer Gleichung vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe, iſt

$$x^2+Ax+B=0$$

ſetzt man hier $x=y-\frac{1}{2}A$, ſo erhält man eine andere Gleichung deſſelben Grades, in welcher das Glied Ax abgeht, nämlich

$(y-\frac{1}{2}A)^2+A(y-\frac{1}{2}A)+B=y^2+\frac{1}{4}A^2+B=0$,

und dieſe reine quadratiſche Gleichung gibt

$y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$, hieraus folgt
$x = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$ Zur goniometrischen Berechnung der Wurzeln setze man $\frac{1}{4}A^2 = \frac{B}{\sin^2\varphi}$, hiedurch wird $\frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{B}}{\sin\varphi}$, und $\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)} = \frac{\cos\varphi\sqrt{B}}{\sin\varphi}$, also $x = \frac{\sqrt{B}}{\sin\varphi}(\cos\varphi - 1)$, nun ist

$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi = 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi - 1$, $\sin\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi$, sonach $x = -tg\frac{1}{2}\varphi\sqrt{B} = +\cot\frac{1}{2}\varphi\sqrt{B}$. Ist aber B in der Gleichung negativ, so setze man $\frac{1}{4}A^2 = \frac{B}{tg^2\varphi}$ und man findet eben so $x = tg\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{B} = -\cot\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{B}$.

191. Die allgemeine Form einer Gleichung vom dritten Grade ist $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$: setzt man $x = y - \frac{1}{3}A$, so läßt sich hiedurch das Glied Ax^2 wegschaffen, und man erhält die Gleichung $y^3 + Py + Q = 0$ wo $P = B - \frac{1}{3}A^2$, $Q = C - \frac{1}{3}AB + \frac{2}{27}A^3$ bedeutet: es seien p, q zwei unbestimmte Größen von der Art, daß $y = p + q$ ist, so wird

$y^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = 3pq(p+q) + p^3 + q^3$
$= 3pqy + p^3 + q^3$, und daher $y^3 - 3pqy - p^3 - q^3 = 0$
Vergleicht man diese Gleichung mit der vorigen, so ergibt sich $P = -3pq$, $Q = -p^3 - q^3$, hieraus folgt $q = \frac{-P}{3p}$, und wenn man diesen Werth statt q im Ausdrucke von Q substituirt, erhält man $Q = -p^3 + \frac{P^3}{27p^3}$, oder $p^6 + Qp^3 - \frac{1}{27}P^3 = 0$

Da diese Gleichung in Bezug auf p^3, wie eine quadratische aufgelöst werden kann, so ist
$p^3 = -\frac{1}{2}Q \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Q^2 + \frac{4}{27}P^3)}$, setzt man zur Abkürzung die Wurzelgröße $\sqrt{(Q^2 + \frac{4}{27}P^3)} = R$, so hat

man $p^3 = -\frac{1}{2}Q \pm \frac{1}{2}R$, daher $p = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}Q \pm \frac{1}{2}R)}$
und substituirt man den für p^3 gefundenen Werth in der Gleichung $q^3 = -p^3 - Q$, so wird

$q^3 = -\frac{1}{2}Q \mp \frac{1}{2}R$, daher $q = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}Q \mp \frac{1}{2}R)}$, dieß gibt $y = p + q = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R)} - \sqrt[3]{(\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R)}$ 220)
welchen Ausdruck man die Kardan'sche Formel nennt. Die übrigen zwei Würzeln zu erhalten, dividire man die Gleichung mit dem Wurzelfaktor $y - (p + q)$; so findet man den Quotienten nach (181)

$y^2 + (p+q)y + (p+q)^2 - 3pq = 0$, woraus
$y = -\frac{1}{2}(p+q) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(p+q)^2 - (p+q)^2 + 3pq)}$, nämlich
$y = -\frac{1}{2}(p+q) \pm \frac{1}{2}(p+q)\sqrt{-3}$ folgt.

192. Ist P positiv, oder aber negativ aber $Q^2 > -\frac{4}{27}P^3$, so wird $R = \sqrt{(Q^2 + \frac{4P^3}{27})}$ immer reell; folglich hat die kubische Gleichung in diesen zwei Fällen eine reelle, und zwei imaginäre Wurzeln. Wird $Q^2 + \frac{4}{27}P^3 = 0$, so folgt $p = q$, und die obigen Formeln geben dann für y die drei Werthe

$$-2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q}, \quad +\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q} \text{ und } +\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q}$$

d. h. die Gleichung hat in diesem Falle drei reelle Wurzeln, wovon zwei einander gleich sind. Erhält endlich $Q^2 + \frac{4}{27}P^3$ einen negativen Werth, so wird R imaginär, und die drei Wurzeln erscheinen dann unter imaginären Formen. Aber jeder Gleichung einer ungeraden Ordnung gehört wenigstens eine reelle Wurzel an, daher müssen sich die imaginären Theile im Ausdrucke derselben tilgen. Sei in diesem Falle w die reelle Wurzel der Gleichung $y^3 + Py + Q = 0$
so erhält man, durch die Division derselben mit $y - w$ nach (181) den Quotienten $y^2 + wy + w^2 + P = 0$, woraus sich die beiden Wurzeln

$y = -\frac{1}{2}w \pm \sqrt{(-\frac{3}{4}w^2 - P)}$ ergeben. Da w eine Wurzel obiger Gleichung ist, so hat man auch $w^3 + Pw + Q = o$, also $Q = -w^3 - Pw$, setzt man nun zur Abkürzung $-\frac{3}{4}w^2 - P = k$, wodurch $P = -(\frac{3}{4}w^2 + k)$ wird, so erhält man $Q = -\frac{1}{4}w^3 + kw$ und

$Q^2 + \frac{4}{27}P^3 = -\frac{3}{4}kw^4 + \frac{3}{3}k^2w^2 - \frac{4}{27}k^3 = -3k(\frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{9}k)^2$

da aber der Faktor $(\frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{9}k)^2$ nie negativ werden kann, so muß das Zeichen von k jenem der Größe $Q^2 + \frac{4}{27}P^3$ stets entgegengesetzt sein; es ist also k positiv, wenn $Q^2 + \frac{4}{27}P^3$ negativ ausfällt, und dann sind die beiden andern Wurzeln $y = -\frac{1}{2}w \pm \sqrt{k}$ reelle Größen, mithin hat die kubische Gleichung in dem sogenannten irreduktiblen Falle, sämmtliche Wurzeln reell.

193. Man kann die Kardan'sche Formel mit Hülfe goniometrischer Funktionen auf eine zur Rechnung bequeme Gestalt bringen.

Sei erstlich P positiv, und man setze $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{4P^3}{27Q^2}}$ wodurch $Q = \frac{2}{tg\,\varphi}(\frac{1}{3}P)^{\frac{3}{2}}$, und $R = \frac{2}{\sin\varphi}(\frac{1}{3}P)^{\frac{3}{2}}$ wird, folglich hat man $y = (\frac{1}{3}P)^{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}})$

oder $y = (\frac{1}{3}P)^{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\varphi} - \sqrt[3]{cot\,\frac{1}{2}\varphi})$ A

Läßt man nun $\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\varphi} = tg\,\psi$ sein, wodurch $\sqrt[3]{cot\,\frac{1}{2}\varphi} = cot\,\psi$ wird, so ergibt sich

$y = (\frac{1}{3}P)^{\frac{1}{2}}(tg\,\psi - cot\,\psi) = \sqrt{\frac{1}{3}P}\,\frac{tg^2\psi - 1}{tg\,\psi}$, und wegen 157) wird $y = -2\sqrt{\frac{1}{3}P}.\,cot\,2\psi$.

Sei nun P negativ, aber $Q^2 > \frac{4}{27}P^3$, so setze man $\sqrt{\frac{4P^3}{27Q^2}} = \sin\varphi$ und es kömmt in der eben erhaltenen

Formel $\sin\varphi$ anstatt $tg\,\varphi$, und folglich $\frac{1}{\sin 2\psi}$ anstatt $\cot 2\psi$, zu setzen, wodurch die Wurzel der Gleichung $y^3 - Py + Q$ gleich $\frac{-2}{\sin 2\psi}\sqrt{\frac{P}{3}}$ wird. Man bestimme daher aus der Gleichung $\sqrt{\frac{4P^3}{27Q^2}} = tang\,\varphi$ im ersten Falle, und $\sqrt{\frac{4P^3}{27Q^2}} = \sin\varphi$ im zweiten Falle, den Werth φ, suche hierauf aus der Gleichung $\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\varphi} = tg\,\psi$ die Größe ψ; und berechne sodann den Werth von y nach der Gleichung $y = -2\cot 2\psi.\sqrt{\frac{1}{3}P}$ im ersten, und $y = -\frac{2}{\sin 2\psi}\sqrt{\frac{1}{3}P}$ im zweiten Falle. Sei endlich P negativ und zugleich $Q^2 < \frac{4}{27}P^3$, man setze dann $y = r\sin\varphi$, wobei r und φ noch unbestimmt sind, so hat man wegen 123) die Gleichung

$\sin^3\varphi = -\frac{1}{4}(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi)$, oder

$y^3 - \frac{3}{4}r^2\sin\varphi + \frac{1}{4}r^3\sin 3\varphi = 0$, oder wegen $y = r\sin\varphi$

$y^3 - \frac{3}{4}r^2 y + \frac{1}{4}r^3\sin 3\varphi = 0$

welcher Gleichung die Wurzel $y = r\sin\varphi$ entspricht. Hält man sie aber gegen die gegebene Gleichung $y^3 - Py + Q = 0$, so hat man sofort $-\frac{3}{4}r^2 = P$, $\frac{1}{4}r^3\sin 3\varphi = Q$: hieraus folgt $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}P}$, und $\frac{Q}{P} = -\frac{1}{3}r\sin 3\varphi$, also $\sin 3\varphi = -\frac{3Q}{rP} = \frac{Q}{2\left(\frac{1}{3}P\right)^{\frac{3}{2}}}$. Da hiedurch die Werthe von r und φ gegeben sind, so kennt man auch $y = r\sin\varphi$; die zwei anderen Wurzeln erhält man, wegen

$\sin 3\varphi = \sin(2\pi + 3\varphi) = \sin(4\pi + 3\varphi)$ u. s. f.

$r\sin(\frac{2}{3}\pi + \varphi)$, $r\sin(\frac{4}{3}\pi + \varphi)$ oder

$r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$, und $-r\sin(\frac{1}{3}\pi + \varphi)$

weil die Größen $\frac{2}{3}\pi+\varphi$ und $\frac{1}{3}\pi-\varphi$ einerlei Sinus haben, hingegen die Sinus von $\frac{4}{3}\pi+\varphi$ und $\frac{1}{3}\pi+\varphi$ zwar gleich aber entgegengesetzt sind.

Beispiel I. Sei $y^3+9y+6=0$, also $P=9$, $Q=6$, daher $tg\,\varphi=\sqrt{3}=tg\,\frac{1}{3}\pi$, folglich $\varphi=60°$, ferner $tg\,\psi=\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\varphi}=\sqrt[3]{tg\,30°}$, oder $l\,tg\,\psi=\frac{1}{3}l\,tg\,30°=9{,}920480$; hieraus folgt $\psi=39°.784$, $l\,cot\,2\psi=9{,}265117$

$l\,2=0{,}301030$

$\frac{1}{2}l\,3=0{,}238561=l\sqrt{\frac{1}{3}P}$

$ly=l2\,cot\,\psi.\sqrt{\frac{1}{3}P}=0{,}804708-1$; $y=0{,}637834$

Beispiel II. Sei $y^3-5y+3=0$, also $Q^2<\frac{4}{27}P^3$ so hat man $r=2\sqrt{\frac{1}{3}P}$, dieß gibt $lr=0{,}411959$: ferner ist $sin\,3\psi=\frac{3Q}{rP}$, $l\,sin\,3\psi=9.843304$

$=l\,sin\,44°.196$, also

$\varphi=14°.732$, und $l\,sin\varphi=9.405345$

$ly=lr\,sin\,\varphi=9.317304$

$y=0{,}656615$, die beiden anderen Wurzeln sind 1.834245 und -2.490860 Vergl. Anmerk. e.

194. Wenn man in der allgemeinen Gleichung des vierten Grades $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ $x=y-\frac{1}{4}A$ setzt, so erhält man eine Gleichung desselben Grades, in welcher das Glied Ax^3 abgeht, nämlich

$$y^4+Py^2+Qy+R=0 \quad \ldots \quad \alpha)$$

hiebei ist $P=B-\frac{3}{8}A^2$, $Q=C-\frac{1}{2}AB+\frac{1}{8}A^3$

$R=D-\frac{1}{4}AC+\frac{1}{16}A^2B-\frac{3}{256}A^4$:

man setze nun $y=p+q+r$, und zur Abkürzung

$p^2+q^2+r^2=g$, so wird

$y^2=g+2(pq+pr+qr)$ folglich

$y^2-g=2(pq+pr+qr)$

Erhebt man beide Theile zum Quadrat, und setzt Kürze halber $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = h$, $p^2q^2r^2 = k$, so findet man

$$y^4 - 2gy^2 + g^2 = 4h + 8(p+q+r)\sqrt{k} = 4h + 8y\sqrt{k}$$

sonach wird $y^4 - 2gy^2 - 8\sqrt{k}.y + g - 4h = o$

deren Wurzel $y = p+q+r$ ist. Hält man diese gegen die Gleichung α), so erhält man

$P = -2g$, $Q = -8\sqrt{k}$, $R = g^2 - 4h$, woraus folgt

$$g = -\tfrac{1}{2}P, \quad h = \frac{P^2 - 4R}{16}, \quad k = \frac{Q^2}{64}$$

Bildet man aus diesen Größen die kubische Gleichung

$$z^3 - gz^2 + hz - k = o \quad \ldots \quad \beta)$$

so sind den für g, h, k angenommenen Werthen zu Folge p^2, q^2 und r^2 die drei Wurzeln derselben, und wenn man statt g, h, und k ihre Werthe setzt, so erhält man aus der Gleichung α) die kubische Gleichung

$$z^3 + \tfrac{1}{2}Pz^2 + \frac{P^2 - 4R}{16}z - \frac{Q^2}{64} = o$$

deren Wurzeln p^2, q^2, r^2 sind.

Die Wurzeln dieser Quadrate kann man aber sowohl positiv als negativ nehmen, daher erhält man aus der Verbindung derselben 8 verschiedene Werthe für y: nun kann die Gleichung α) nur vier Wurzeln haben, sonach müssen unter jenen acht Werthen diejenigen gewählt werden, welche dem Produkte pqr das Zeichen von $-Q$ in der Gleichung α) ertheilen. Die vier Wurzeln sind also wenn Q positiv, wenn hingegen Q negativ ist

$p+q-r$	$p+q+r$
$p-q+r$	$p-q-r$
$-p+q+r$	$-p-q+r$
$-p-q-r$	$-p+q-r$

195. Gleichungen von der Form

$$Ax^m + Bx^{m-n} + Cx^{m-2n} + Dx^{m-3n} + Ex^{m-4n} = o$$

kann man wie eine biquadratische lösen, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor aller Glieder x^{m-4n} wegschafft, denn man erhält dann

$$Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E = 0$$

welche Gleichung für $x^n = y$ in folgende

$$Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0$$

übergeht. Ist aber der Koeffizient $E = 0$, so führt dasselbe Verfahren auf eine kubische Gleichung,
$Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$: wofern aber auch $D = 0$, so erhält man auf gleiche Weise die quadratische Gleichung $Ay^2 + By + C = 0$ Wenn hingegen eine Gleichung die Form einer reziproken Gleichung hat, oder durch eine Substitution auf eine solche zurückführt werden kann, so kann man sie, wenn sie den neunten Grad nicht übersteigt, ganz allgemein auflösen. Z. B. Die Gleichung

$$x^9 + Ahx^8 + Bh^2x^7 + Ch^3x^6 + Dh^4x^5$$
$$+ Dh^5x^4 + Ch^6x^3 + Bh^7x^2 + Ah^8x + h^9 = 0$$

läßt sich auf eine reziproke Form bringen, wenn man $x = hy$ setzt, man erhält dann nach der Division mit h^9 folgende Gleichung:

$$y^9 + Ay^8 + By^7 + Cy^6 + Dy^5 + Dy^4 + Cy^3 + By^2 + Ay + 1 = 0$$

XI. Arithmetische Reihen.

196. Man bezeichne die Differenzen je zweier auf einander folgenden Glieder der Reihe

$$a, a_2, a_3, a_4 \ldots a_n, \text{ mit}$$
$$\delta a, \delta a_2, \delta a_3 \ldots \text{nämlich}$$

$a_2 - a = \delta a$, $a_3 - a_2 = \delta a_2$, $a_4 - a_3 = \delta a_3$, und allgemein $a_{n+1} - a_n = \delta a_n \ldots \mu)$
so bilden die Größen $\delta a, \delta a_2, \delta a_3 \ldots \delta a_n$ wieder eine Reihe, welche die erste Differenzreihe heißt, während die Reihe, aus der sie entstanden ist, die Hauptreihe genannt wird.

Verfährt man auf dieselbe Weise mit der ersten Differenzreihe, und setzt
$\delta a_2 - \delta a = \delta^2 a$, $\delta a_3 - \delta a_2 = \delta^2 a_2$, und allgemein $\delta a_{n+1} - \delta a_n = \delta^2 a_n$, so sind $\delta^2 a$, $\delta^2 a_2$, $\delta^2 a_3 \ldots \delta^2 a_n$ Glieder der zweiten Differenzreihe, aus welcher auf dieselbe Weise die dritte, aus dieser die vierte Differenzreihe u. s. f. abgeleitet werden kann.

197. Die Gleichung μ) gibt $a_{n+1} = a_n + \delta a_n$, also für $n = 1$, $a_2 = a + \delta a$; folglich auch wenn man die erste Differenzreihe, wie die Hauptreihe behandelt, $\delta a_2 = \delta a + \delta^2 a$, und somit
$a_3 = a_2 + \delta a_2 = a + 2\delta a + \delta^2 a$
und hieraus folgt, wenn man die erste Differenzreihe als Hauptreihe betrachtet
$\delta a_2 = \delta a + 2\delta^2 a + \delta^3 a$, es ist aber
$a_4 = a_3 + \delta a_3 = a + 3\delta a + 3\delta^2 a + \delta^3 a$
eben so ergibt sich
$a_5 = a + 4\delta a + 6\delta^2 a + 4\delta^3 a + \delta^4 a$
und man bemerkt leicht, daß in den für
a_2, a_3, a_4, a_5 entwickelten Ausdrücken die Koeffizienten der auf einander folgenden Glieder mit den Binomialkoeffizienten übereinstimmen, setzt man also

$$a_n = a + \binom{n-1}{1}\delta a + \binom{n-1}{2}\delta^2 a + \binom{n-1}{3}\delta^3 a + \ldots + \binom{n-1}{r-1}\delta^{r-1} a + \binom{n-1}{r}\delta^r a + \ldots$$

mithin, wenn man die erste Differenzreihe zur Hauptreihe annimmt,

$$\delta a_n = \delta a + \binom{n-1}{1}\delta^2 a + \binom{n-1}{2}\delta^2 a + \ldots \binom{n-1}{r-1}\delta^r a + \binom{n-1}{r}\delta^{r+1} a + \ldots,$$

so erhält ma $a_{n+1} = a_n + \delta a_n$

$$= a + \left[1 + \binom{n-1}{1}\right]\delta a + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right]\delta^2 a$$
$$+ \left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}\right]\delta^3 a + \ldots .$$
$$+ \left[\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}\right]\delta^r a + \ldots \text{ und wegen}$$
$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r} \quad \text{wird}$$

$$a_{n+1} = a + \binom{n}{1}\delta a + \binom{n}{2}\delta^2 a + \binom{n}{3}\delta^3 a + \ldots + \binom{n}{r}\delta^r a \ldots \quad 220)$$

es gilt also das für a_n angenommene Gesetz auch bei a_{n+1}, daher ist es allgemein für jede ganze positive Zahl n geltend.

198. Man bezeichne die Summe der zwei ersten Glieder der Hauptreihe mit S_2, der drei ersten Glieder mit S_3, u. s. f. die Summe ihrer n ersten Glieder mit S_n, so wird, wegen $a_2 = a + \delta a$,

$S_2 = a + a_2 = 2a + \delta a$

$S_3 = S_2 + a_3 = 3a + 3\delta a + \delta^2 a$

$S_4 = S_3 + a_4 = 4a + 6\delta a + 4\delta^2 a + \delta^3 a$ u. s. f. f.

und da auch hier die Koeffizienten wie im Binom fortschreiten, so sei

$$S_{n-1} = \binom{n-1}{1}a + \binom{n-1}{2}\delta a + \binom{n-1}{3}\delta^2 a + \ldots$$
$$+ \binom{n-1}{r+1}\delta^r a + \ldots \text{ und weil}$$

$$a_n = a + \binom{n-1}{1}\delta a + \binom{n-1}{2}\delta^2 a + \ldots \binom{n-1}{r}\delta^r a + \ldots$$

so erhält man

$$S_n = S_{n-1} + a_n = a\left[1 + \binom{n-1}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}\right]\delta a$$
$$+ \left[\binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}\right]\delta^2 a + \ldots + \left[\binom{n-1}{r+1} + \binom{n-1}{r}\right]\delta^r a, \text{ d. i.}$$

$$S_n = \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}\delta a + \binom{n}{3}\delta^2 a + \ldots + \binom{n}{r+1}\delta^r a + \ldots \quad 221)$$

man nennt S_n das summatorische Glied der Hauptreihe.

199. Um endlich in den beiden vorher gefundenen Ausdrücken a_n, S_n die Größen δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, ... durch die Glieder der Hauptreihe auszudrücken, hat man $\delta a = a_2 - a$, $\delta a_2 = a_3 - a_2$, also

$\delta^2 a = \delta a_2 - \delta a = (a_3 - a_2) - (a_2 - a) = a_3 - 2a_2 + a$

daher, wenn man die erste Differenzreihe als Hauptreihe betrachtet ist auch $\delta^3 a = \delta a_3 - 2\delta a_2 + \delta a$ oder

$\delta^3 a = (a_4 - a_3) - 2(a_3 - a_2) + (a_2 - a) = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a$

eben so findet man

$\delta^4 a = a_5 - 4a_4 + 6a_3 - 4a_2 + a$, sei allgemein

$$\delta^{n-1} a = a_n - \binom{n-1}{1} a_{n-1} + \binom{n-1}{2} a_{n-2} - \binom{n-1}{3} a_{n-3} \ldots \pm \binom{n-1}{r} a_{n-r} \mp \binom{n-1}{r+1} a_{n-r-1} \pm \ldots$$

so folgt hieraus, für die als Hauptreihe genommene erste Differenzreihe

$$\delta^n a = \delta a_n - \binom{n-1}{1} \delta a_{n-1} + \binom{n-1}{2} \delta a_{n-2} - \binom{n-1}{3} \delta a_{n-3} + \ldots \pm \binom{n-1}{r} \delta a_{n-r} \mp \binom{n-1}{r+1} \delta a_{n-r-1} \pm \ldots$$

es ist aber $\delta a_n = a_{n+1} - a_n$, $\delta a_{n-r} = a_{n-r+1} - a_{n-r}$ u. s. f. daher hat man

$$\delta^n a = [a_{n+1} - a_n] - \binom{n-1}{1} [a_n - a_{n-1}] + \binom{n-2}{1} [a_{n-1} - a_{n-2}] - \pm \binom{n-1}{r} [a_{n-r+1} - a_{n-r}] \mp \binom{n-1}{r+1} [a_{n-r} - a_{n-r-1}] \pm \ldots$$

und wenn man aus je zwei Gliedern die Größen a_n, a_{n-1}, a_{n-2} ... als Faktoren heraushebt und berücksichtiget, daß allgemein $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r+1} = \binom{n}{r+1}$ ist, wird

$$\delta^n a = a_{n+1} - \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_{n-1} - \binom{n}{3} a_{n-2} + \ldots$$
$$\mp \binom{n}{r+1} a_{n-r} \pm \ldots \quad 222$$

200. Wenn die Glieder irgend einer Differenzreihe gleich sind, so heißt die zugehörige Hauptreihe eine arithmetische Reihe, und zwar der ersten, zweiten, dritten ... mten Ordnung, je nachdem diese Gleichheit der Glieder bei der ersten, zweiten, dritten ... mten Differenzreihe Statt findet.

Man hat daher für arithmetische Reihen der ersten Ordnung $\delta a = \delta a_2 = \delta a_3$, also $\delta a = \delta^2 a_2 = 0$; sonach ist das allgemeine Glied 220)

$a_n = a + (n-1)\delta a$, und das summatorische 223)
Glied 221)

$S_n = n a + \frac{n(n-1)}{2}\delta a = \frac{n}{2}(a + a_n)$ wie bekannt. 224)

Für arithmetische Reihen der zweiten Ordnung ist
$\delta^2 a = \delta^2 a_2 = \delta^2 a_3 \ldots$ und $\delta^3 a = \delta^3 a_2 = 0$, daher

$a_n = a + (n-1)\delta a + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\delta^2 a$, und 225)

$S_n = n a + \frac{1}{2} n(n-1)\delta a + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)\delta^2 a$ 226)

ordnet man diese Ausdrücke nach den Potenzen von n, so erhält man nach 12)

$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\delta^2 a = \frac{1}{2}\delta^2 a . n^2 - \frac{3}{2}\delta^2 a . n + \delta^2 a$, und hiezu
$a + (n-1)\delta a = \delta a . n + a - \delta a$ addirt, wird

$a_n = \frac{1}{2}\delta^2 a . n^2 + \frac{1}{2}(2\delta a - 3\delta^2 a)n + a - \delta a + \delta^2 a$ $\alpha)$

und eben so folgt

$S_n = \frac{1}{6}\delta^2 a . n^3 + \frac{1}{2}(\delta a - \delta^2 a)n^2 + \frac{1}{6}(6a - 3\delta a + 2\delta^2 a)n$ $\beta)$

Es ist aber $\delta a = a_2 - a$, und $\delta^2 a = a_3 - 2a_2 + a$, daher

$a_n = \frac{1}{2}(a - 2a_2 + a_3)n^2 - \frac{1}{2}(5a - 8a_2 + 3a_3)n + 3a - 3a_2 + a_3$ 227)

$S_n = \frac{1}{6}(a - 2a_2 + a_3)n^3 - \frac{1}{2}(2a - 3a_2 + a_3)n^2$
$+ \frac{1}{6}(11a - 7a_2 + 2a_3)n$ 228)

mittelst welcher Ausdrücke man aus drei Anfangsgliedern

einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung ihr allgemeines und summatorisches Glied berechnen kann. Für die Reihe der Quadrate natürlicher Zahlen 1, 4, 9, 16 ... ist $a=1$, $a_2=4$, $a_3=9$, hiedurch wird

$S_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$, d. i.

$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 229)

201. Für arithmetische Reihen der dritten Ordnung hat man $\delta^3 a$ konstant, also $\delta^4 a$, $\delta^5 a$ ... null, mithin ist

$$a_n=a+\binom{n-1}{1}\delta a+\binom{n-1}{2}\delta^2 a+\binom{n-1}{3}\delta^3 a, \text{ und} \quad 230)$$

$$S_n=\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}\delta a+\binom{n}{3}\delta^2 a+\binom{n}{4}\delta^3 a: \text{ allein} \quad 231)$$

$$\binom{n-1}{3}\delta^3 a=\tfrac{1}{6}\delta^3 a.n^3-\delta^3 a.n^2+\tfrac{11}{6}\delta^3 a.n-\delta^3 a,$$

und die übrigen Glieder des Ausdrucks für a_n wurden schon (200) im Ausdrucke α) entwickelt: vereinigt man diese, und ordnet nach den Potenzen von n, so folgt

$$a_n=\tfrac{1}{6}\delta^3 a.n^3+\tfrac{1}{2}(\delta^2 a-2\delta^3 a)n^2+\tfrac{1}{6}(6\delta a-9\delta^2 a+11\delta^3 a)n + a-\delta a+\delta^2 a-\delta^3 a \quad 232)$$

und auf gleiche Weise findet man mit Rücksicht auf β)

$$S_n=\tfrac{1}{24}\delta^3 a.n^4+\tfrac{1}{12}(2\delta^2 a-3\delta^3 a)n^3+\tfrac{1}{24}[12(\delta a-\delta^2 a)+11\delta^3 a]n^2 + \tfrac{1}{12}(12a-6\delta a+4\delta^2 a-3\delta^3 a)n \quad 233)$$

Die dritten Potenzen natürlicher Zahlen bilden eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung, deren Anfangsglied $a=1$, und $\delta a=7$, $\delta^2 a=12$, $\delta^3 a=6$ ist; man erhält sonach nach Substitution dieser Werthe

$S_n=\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$, nämlich

$S_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. 234)

202. Wenn das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe der rten Ordnung und die Anfangsglieder ihrer $r-1$ Differenzreihen nämlich δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, ... $\delta^{r-1} a$ sämmtlich gleich Null sind, oder was dasselbe ist, wenn die r Anfangsglieder a_1, a_2, a_3 ... a_r der Haupt-

reihe verschwinden, so erhält man für das allgemeine und summatorische Glied derselben folgende einfachen Ausdrücke:

$a_n = \binom{n-1}{r} \delta^r a$ und $S_n = \binom{n}{r+1} \delta^r a$.

Sollen nun diese Formeln in andere umgestaltet werden, welche sich auf die bedeutlichen Glieder der Hauptreihe beziehen, so ist klar, daß man weil dann das nte bedeutliche Glied die $(n+r)$te Stelle einnehmen muß, in beiden Formeln überall $n+r$ statt n zu setzen hat, wodurch man erhält

$a_n = \binom{n+r-1}{r} \delta^r a$, und $S_n = \binom{n+r}{r+1} \delta^r a$.

Nun hat man nach 4)

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots(n+1)n}{1 \cdot 2 \ldots (r-1)r} = \frac{n \backsim (n+r-1)}{r!} \text{ nach 28)}$$

folglich ist $a_n = \frac{n \backsim (n+r-1) \delta^r a}{r!}$, und 235)

$$S_n = \frac{(n+1) \backsim (n+r)}{(r+1)!} \delta^r a \quad 236)$$

Setzt man in diesen Formeln statt r nach einander $2, 3, 4 \ldots$ und 1 statt $\delta^r a$, so erhält man gleichbedeutende Ausdrücke für die sogenannten figurirten Zahlen; und zwar für die Trigonalzahlen, wenn man $r=2$ setzt, $\frac{1}{2} n(n+1)$: man bemerkt leicht, daß wegen 234) ihre Quadrate die Summen der natürlichen Kubikzahlen ausdrücken: für die Pyramidalzahlen, wenn man $r=3$ setzt, $\frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$, u. s. f.

203. Zwischen je zwei Glieder einer Reihe eine gegebene Anzahl neuer Glieder so zu bestimmen, daß sie sich an die bereits vorhandenen zu einer, nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gebildeten Reihe anschließen, heißt die Reihe intetpoliren. Die interpolirten Glieder

erhalten gebrochene Zeiger: sind nämlich zwischen a_n und a_{n+1}, $q-1$ neue Glieder einzuschalten, so kann man sie so andeuten:

$$a_n + \tfrac{1}{q},\ a_n + \tfrac{2}{q},\ a_n + \tfrac{3}{q},\ \ldots\ a_n + \tfrac{q-1}{q}$$

Ist nun die vorgelegte Reihe eine arithmetische, oder nehmen die ersten Glieder ihrer auf einander folgenden Differenzreihen so ab, daß sie bei dem in der Rechnung beabsichtigten Grade der Genauigkeit vernachläßigt, daher die Reihe näherungsweise als eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung betrachtet werden kann; so folgt, wenn man sich die Hauptreihe mit dem Gliede a_n anfangend vorstellt, wodurch ihr rtes Glied den Index $n+r-1$ erhält,

$$a_{n+r-1} = a_n + \binom{r-1}{1}\delta a_n + \binom{r-1}{2}\delta^2 a_n + \binom{r-1}{3}\delta^3 a_n + \ldots$$

setzt man nun $r = 1 + \frac{p}{q}$, so wird

$$a_n + \tfrac{p}{q} = a_n + \binom{\frac{p}{q}}{1}\delta a_n + \binom{\frac{p}{q}}{2}\delta^2 a_n + \binom{\frac{p}{q}}{3}\delta^3 a_n + \ldots \quad 237)$$

welche Reihe nothwendig abbricht, da eine der Größen δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, ... nahe konstant, also die folgenden gleich Null sind: aus ihr folgen die einzuschaltenden Glieder, wenn man nach einander $p = 1, 2, 3 \ldots q-1$ setzt. Bei dem Gebrauche dieser Formel muß man aber wohl auf die Vorzeichen der Differenzen Acht haben, auch setzt sie voraus, daß die gegebenen Glieder der Hauptreihe in gleichen Abständen von einander liegen.

Um z. B. in der Reihe 9, 89, 244, 474 ... zwischen je zwei Gliedern 4 andere einzuschalten, hat man $\delta a = 89 - 9 = 80$, $\delta^2 a = 244 - 2.89 + 9 = 75$, $\delta^3 a = 0$, endlich $q = 5$, und man erhält die einzuschaltenden Glieder aus der Formel $x = 9 + \binom{\frac{p}{5}}{1}80 + \binom{\frac{p}{5}}{2}75$: hierin $p = 1$ gesetzt, wird $x = 9 + 16 - 6 = 19$, für $p = 2$, $x = 9 + 32 - 9 = 32$ u. s. f. sonach sind die interpolir-

ten Glieder: 19, 32, 48, 67, und eben so findet man zwischen 89 und 244 die Glieder: 114, 142, 173, 207, u. s. f. welche sämmtlich mit den Gliedern der Hauptreihe eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung bilden, sie ist:

9, 19, 32, 48, 67, 89, 114, 142, 173, 207, 244 . . .

XII. Rekurrente Reihen.

204. Sei die gebrochene Funktion

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{A_0 + Ax + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n}{B_0 + Bx + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots + x_rx^r}$$

in eine Reihe $C_0 + Cx + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots$ zu verwandeln wo $A_0, A, A_2, A_3 \ldots A_n, B_0, B, B_2, B_3 \ldots B_r$, gegebene Koeffizienten bedeuten, die kein x enthalten, hingegen $C_0, C, C_2, C_3, \ldots$ noch unbestimmte Größen vorstellen. Multiplizirt man beiderseits mit dem Nenner $Fx = B_0 + Bx + B_2x^2 + \ldots$ und ordnet rechter Hand nach x, so erhält man

$$\begin{aligned} A_0 + Ax + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n \\ = B_0C_0 + \left.\begin{matrix} B_0C \\ BC_0 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} B_0C_2 \\ BC \\ B_2C_0 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} B_0C_3 \\ BC_2 \\ B_2C \\ B_3C_0 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots \end{aligned}$$

daher ist

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= B_0C_0 \\ A &= B_0C + BC_0 \\ A_2 &= B_0C_2 + BC + B_2C_0 \end{aligned}\right\} \mu)$$

$A_3 = B_0C_3 + BC_2 + B_2C + B_3C_0$ und allgemein

$A_m = B_0C_m + BC_{m-1} + B_2C_{m-2} + \ldots + B_{m-1}C + B_mC_0$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$C_0 = \frac{A_0}{B_0},\quad C = \frac{A - BC_0}{B_0},\quad C_2 = \frac{A_2 - BC - B_2C_0}{B_0}$$

und allgemein

$$C_m = \frac{A_m - B_m C_0 - B_{m-1} C - \ldots - B C_{m-1}}{B_0} \quad \nu)$$

Ist nun die gebrochene Funktion ein echter Bruch, also $n < r$, so daß die Koeffizienten

$A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots A_{r-1}, A_r, A_{r+1}$, sämmtlich null sind, und eben so $B_{r+1} = 0$ u. s. f., so erhält man aus ν), wenn man nach und nach $r, r+1, r+2 \ldots$ statt m setzt

$$C_r = \frac{B_r C_0 + B_{r-1} C + B_{r-2} C_2 + \ldots + B C_{r-1}}{B_0}$$

$$C_{r+1} = \frac{B_r C + B_{r-1} C_2 + B_{r-2} C_3 + \ldots + B C_r}{B_0}$$

$$C_{r+2} = \frac{B_r C_2 + B_{r-1} C_3 + B_{r-2} C_4 + \ldots + B C_{r+1}}{B_0}$$

u. s. f. woraus zu ersehen ist, daß vom Koeffizienten C_r angefangen, jeder folgende durch eine gleiche Anzahl vorhergehender Koeffizienten $C_{r-1}, C_{r-2} \ldots C_0, C_r, C_{r-1}, \ldots C$ ferner $C_{r+1}, C_r, \ldots C_2$, u. s. f. bestimmt wird, indem jeder derselben nach der Ordnung mit

$\frac{B}{B_0}, \frac{B_r}{B_0}, \ldots \frac{B_r}{B_0}$ multiplizirt wird, d. h. es entsteht von einem gewissen Koeffizienten angefangen jeder nachfolgende, wenn man eine bestimmte Anzahl vorhergehender Koeffizienten mit beständigen Faktoren multiplizirt und die Summe dieser Produkte nimmt. Man nennt daher die Reihen, welche aus der Entwickelung einer gebrochenen Funktion zum Vorschein kommen, rekurrente oder wiederkeh-

rende Reihen, und die Faktoren $\frac{B}{B_0}, \frac{B_2}{B_0}, \ldots \frac{B_r}{B_0}$ zusammen den Maßstab, die Relationsskale derselben, nach deren Anzahl die rekurrenten Reihen in Ordnungen unterschieden werden.

205. Um die Koeffizienten der rekurrenten Reihe in ganzen und positiven Zahlen zu erhalten, mache man $B_0 = 1$, hingegen die folgenden Koeffizienten $B, B_2, B_3 \ldots$ negativ, so entsteht aus der gebrochenen Funktion

$$\frac{A_0 + Ax + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n}{1 - Bx - B_2 x^2 - \ldots - B_r x^r}$$

die rekurrente Reihe der rten Ordnung, deren Relationsskale die Größen $B, B_2 \ldots B_r$ bilden, und man erhält

$$\left.\begin{aligned} C_r &= B_r C_0 + B_{r-1} C + B_{r-2} C_2 + \ldots + B C_{r-1} \\ C_{r+1} &= B_r C + B_{r-1} C_2 + B_{r-2} C_3 + \ldots + B C_r \text{ u. s. f.} \end{aligned}\right\} \varrho)$$

Hiernach folgt für eine rekurrente Reihe der ersten Ordnung, wenn man $A, A_2, A_3 \ldots$ ferner $B_2, B_3 \ldots$ Null sein läßt,

$C_0 = A_0$, $C = BA_0$, $C_2 = BC = B^2 A_0$, $C_3 = B^3 A_0$ u. s. f.

$C_r = B^r A_0$; mithin ist

$$\frac{A_0}{1 - Bx} = A(1 + Bx + B^2 x^2 + B^3 x^3 + \ldots + B^r x^r + \ldots)$$

da diese Reihe eine geometrische Progression bildet, so ist jede rekurrente Reihe der ersten Ordnung eine geometrische Reihe.

Umgekehrt findet man aus dem ersten Gliede einer rekurrenten Reihe A_0, und der Relationsskale B, den zugehörigen erzeugenden Bruch, wenn man ihn setzt $= \frac{A_0}{1 - Bx}$. Z. B. Bei der Reihe

$1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^3+\ldots$ ist $A_0=1$, $B=-\frac{1}{2}$, daher der erzeugende Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}x}=\frac{2}{2+x}$

206. Bei einer rekurrenten Reihe der zweiten Ordnung, ist A_2, A_3, ... ferner B_3, B_4 ... Null, sonach
$C_0=A_0$, $C=A+BA_0$, $C_2=BC+B_2C_2$, $C_3=BC_2+B_2C$, u. s. f. $C_r=BC_{r-1}+B_2C_{r-2}$. Z. B. für die Relationsskale -3, $+10$ und bei den Anfangsgliedern $A_0=1$, $A=2$, ist die entsprechende Reihe
$1, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4, \ldots$ Um aus ihren zwei Anfangsgliedern C_0, C und der Relationsskale B, B_2 den erzeugenden Bruch zu finden, hat man
$A_0=C_0$, $A=C-BB_0$, sonach ist der gesuchte Bruch $\frac{C_0+(C-BA_0)x}{1-Bx-B_2x^2}$ z. B. bei der Reihe
$1+4x+14x^2+46x^3+\ldots$ ist $C_0=1, C=4, B=5, B_2=-6$, also der erzeugende Bruch $=\frac{1-x}{1-5x+6x^2}$. Wofern aber die Relationsskala nicht gegeben wäre, so findet man aus den Gleichungen $C_2=BC+B_2C_0$, $C_3=BC_2+B_3C$ die Größen $B=\frac{CC_2-C_0C_3}{C^2-C_2C_0}$, $B_2=\frac{CC_3-C_2^2}{C^2-C_2C_0}$ Z. B. für die Reihe $x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\ldots$ ist $C_0=0$, $C=1$, $C_2=2$, $C_3=3$, also
$B=2$, $B_2=-1$, A_0, $A=1$ daher der erzeugende Bruch $\frac{x}{1-2x+x^2}$

207. Das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe C_mx^m wird nach (200) nur mittelst der Koeffizienten der vorhergehenden Glieder bestimmt. Verlangt man dafür eine independente Form (117), so kann man auf folgende Art verfahren: man nehme an, der Nenner des

erzeugenden Bruches $\frac{fx}{Fx} = \frac{A+Ax+A_2x^2+\ldots A_{r-1}x^{r-1}}{1-Bx-B_2x^2-\ldots B_rx^r}$

erhalte r verschiedene zweitheilige Faktoren, welche sich finden lassen, wenn man denselben = o setzt, und von der Gleichung $x^r + \frac{B_{r-1}x^{r-1}}{B_r} + \ldots \frac{Bx}{B_r} + \frac{1}{B_r} = o$

die Wurzeln sucht. Wären diese

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots \frac{1}{p}, \frac{1}{q}$, so hat man 156)

$\frac{Fx}{B_r} = (x-\frac{1}{a})(x-\frac{1}{b})\ldots(x-\frac{1}{p})(x-\frac{1}{q})$, allein das von x freie Glied, oder

$\frac{1}{B_r} = \pm\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\ldots\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}$, daher wird, wenn man beiderseits mit $B_r = \pm a.b.c\ldots p.q.$ multiplizirt

$$Fx = (1-ax)(1-bx)\ldots(1-px)(1-qx); \quad 238)$$

man setze nun

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{D_1}{1-ax} + \frac{D_2}{1-bx} + \frac{D_3}{1-cx} + \ldots \frac{D_r}{1-qx},$$

wo $D_1, D_2, D_3 \ldots D_r$ noch unbestimmte Koeffizienten bedeuten, welche gefunden werden, wenn man sämmtliche Brüche auf den Nenner Fx gebracht hat, und die sich ergebenden Zähler mit fx vergleicht. Es ist aber leicht einzusehen, daß dann der Zähler irgend eines Bruches sämmtliche Wurzelfaktoren

$1-ax, 1-bx, \ldots 1-qx$ mit Ausschluß desjenigen enthalten wird, der in seinem Nenner vorkömmt, daß sonach alle übrigen Zähler verschwinden, wenn man diesen Wurzelfaktor null sein läßt: hiedurch erhält man für

$$ax = 1, \text{ oder } x = \frac{1}{a}$$

$$D_1\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)\ldots\left(1-\frac{q}{a}\right) = f\frac{1}{a}, \text{ nämlich}$$

$$D^1(a-b)(a-c)\ldots(a-q)$$
$$= A_0 a^{r-1} + Aa^{r-2} + A_2 a^{r-3} + \ldots + A_{r-1}$$

woraus $$D_1 = \frac{A_0 a^{r-1} + Aa^{r-2} + A_2 a^{r-3} + \ldots A_{r-1}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-p)(a-q)} \quad 239)$$

folgt, und eben so erhält man für $x = \frac{1}{b}$,

$$D_2 = \frac{A_0 b^{r-1} + Ab^{r-2} + A_2 b^{r-3} + \ldots A_{r-1}}{(b-a)(b-c)\ldots(b-p)(b-q)} \text{ u. s. f.}$$

Wenn aber die Brüche

$$\frac{D_1}{1-ax}, \frac{D_2}{1-bx}, \frac{D_3}{1-cx}, \ldots \frac{D_r}{1-qx} \text{ nach (202)}$$

in rekurrente Reihen verwandelt werden, so ergibt sich

$$\frac{D_1}{1-ax} = D_1[1 + ax + a^2x^2 + \ldots + a^m x^m + \ldots]$$

$$\frac{D_2}{1-bx} = D_2[1 + bx + b^2x^2 + \ldots + b^m x^m + \ldots]$$

. . . . . .

$$\frac{D_r}{1-qx} = D_r[1 + qx + q^2x^2 + \ldots + q^m x^m + \ldots]$$

sonach ist der Koeffizient von x^m, oder

$$C_m = a^m D_1 + b^m D_2 + c^m D_3 + \ldots + q^m D_r \quad 240)$$

208. Hiernach erhält man: für Reihen der zweiten Ordnung

$$\frac{A_0 + Ax}{(1-ax)(1-bx)},\ C_m = a^m D_1 + b^m D_2,\ D_1 = \frac{A_0 a + A}{a-b},$$

$$D_2 = \frac{A_0 b + A}{b-a} \qquad 241)$$

für Reihen der dritten Ordnung

$$\frac{A_0 + Ax + A_2 x^2}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)},\ C_m = a^m D_1 + b^m D_2 + c^m D_3,$$

$$D_1 = \frac{A_0 a^2 + Aa + A_2}{(a-b)(a-c)},\ D_2 = \frac{A_0 b^2 + Ab + A_2}{(b-a)(b-c)}$$

$$D_3 = \frac{A_0 c^2 + Ac + A_2}{(c-a)(c-b)},\ \text{u. s. f.} \qquad 242)$$

Z. B. Sei der erzeugende Bruch

$\frac{1-x}{1-5x+6x^2} = \frac{1-x}{(1-2x)(1-3x)}$, so ist $a=2, b=3$, und $D_1 = -1$, $D_2 = 2$, und daher das allgemeine Glied $[-2^m + 2.3^m]\,x^m$: die zugehörige Reihe ist $1, 4x, 14x^2\ 46x^3, 146x^4, 454x^5, \ldots$ Für den Bruch $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)(1+2x)(1+x)}$ hat man

$D_1 = 1$, $D_2 = -1$, $D_3 = 1$, also $C_m = 1 \mp \left(2^m - 1\right)$, die zugehörige Reihe ist: $1, 2x, -2x^2, 8x^3, -14x^4, 32x^5, \ldots$

209. Hat aber der Nenner des erzeugenden Bruches zwei gleiche Faktoren, jeden gleich $1-ax$, so wird man den gegebenen Bruch

$\frac{A_0 + Ax}{(1-ax)^2} = \frac{D_1}{(1-ax)^2} + \frac{D_2}{1-ax}$ setzen, und die Größen D_1, D_2 durch die Reduktion der beiden letzten Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner bestimmen, man findet so: $D_1 = A_0 + \frac{A}{a}$, $D_2 = -\frac{A}{a}$, und weil

$\frac{1}{(1-ax)^2} = 1 + 2ax + 3a^2x^2 + 4a^3x^3 + \ldots$, so

entsteht aus dem ersten dieser beiden Brüche das allgemeine Gliede $(m+1)\,a^m D_1$, während der zweite wie zuvor $a^m D_2$ gibt: und eben so kann man bei mehreren gleichen Faktoren verfahren.

Z. B. $\frac{1-5x+8x^2}{(1-3x)^2(1-2x)} = \frac{D}{(1-3x)^2} + \frac{D_2}{1-3x} + \frac{D_3}{1-2x}$,

und man erhält $D_1 = \frac{2}{3}$, $D_2 = -\frac{5}{3}$, $D_3 = 2$, also ist auch das gesuchte allgemeine Glied

$C_m = (2m-3)\,3^{m-1} + 2^{m+1}$, und die zugehörige Reihe: $1, 3x, 11x^2, 43x^3, 167x^4, \ldots$ Eben so gibt der Bruch $\frac{2-9x}{(3+x)^2}$ zum allgemeinen Glied $\pm\frac{29m+2}{3^{m+2}}$, wo das obere Zeichen für ein gerades m gilt, und die zugehörige Reihe $\frac{2}{9}, -\frac{81}{27}x, \frac{60}{81}x^2, -\frac{899}{243}x^3, \ldots$ Einen ausführlichen Unterricht über diesen Gegenstand findet man in Eytelweins Grundlehren der höheren Analysis. I. 492. Berlin 1824.

Zweites Buch.

Differential- und Integral-Rechnung.

I. Leibnitzen's Infinitesimalrechnung.

210. Läßt man in einer Funktion y von x, die veränderliche Größe um einen unendlich kleinen Theil derselben $= \frac{x}{\infty}$ wachsen, so heißt nach Leibnitz diese Veränderung, das Differential derselben, und wird mit dx bezeichnet, und die zugehörige Veränderung der Funktion y, nennt man das Differential der Funktion, welches ebenfalls durch ein vorgesetztes d angedeutet wird. Das Differentiale einer Funktion wird daher gefunden, wenn man in derselben überall $x+dx$ statt x schreibt, und von der so veränderten Funktion die Funktion selbst abzieht, endlich in dem Ergebnisse sämmtliche Glieder, welche höhere Potenzen von dx enthalten in Beziehung zu dem Gliede mit dessen niedrigsten Potenz, wegläßt.

Z. B. Sei $y = ax + bx^2 - 2c$, so findet man $y + dy = a(x+dx) + b(x+dx)^2 - 2c$, daher $dy = (ax + 2bx)\,dx$.

211. Hiernach findet man für die algebraischen Funktionen $y = Ax^n$, $y = Fx.fx$, und $y = \frac{Fx}{fx}$ die Differentiale, wie folgt: Es ist, wenn $y = Ax^n$ gesetzt wird,

$$y + dy = A(x + dx)^n = Ax^n + nAx^{n-1}dx + \tfrac{1}{2}n(n-1)Ax^{n-2}dx^2 + \ldots$$

und hievon $y = Ax^n$ abgezogen, bleibt

$$dy = nAx^{n-1}dx + \tfrac{1}{2}n(n-1)Ax^{n-2}dx^2 + \ldots$$

und die Glieder mit dx^2 und den höheren Potenzen von dx weglassen, wird

$$d.Ax^n = nAx^{n-1}dx \ldots \quad 243)$$

Setzt man hierin $n = \frac{1}{2}$, so wird $Ax^n = A\sqrt{x}$, daher

$$d.A\sqrt{x} = \frac{A\,dx}{2\sqrt{x}} \ldots \quad 244)$$

Sei nun $y = fx.Fx$, man setze zur Abkürzung $fx = p$, $Fx = q$, so wird

$$y + dy = (p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dp.dq$$

hievon $y = pq$ abgezogen, bleibt

$$dy = pdq + qdp + dp.dq$$

es verschwindet aber $dp.dq$ als ein unendlich Kleines von der zweiten Ordnung, in Beziehung zu den Gliedern pdq, qdp, sonach hat man

$dy = pdq + qdp$, d. i.

$$d.Fx.fx = fx.dFx + Fx.dfx \ldots \quad 245)$$

Sei endlich $y = \frac{Fx}{fx}$, so erhält man hieraus

$y.fx = Fx$, dessen Differentiale nach der Formel 245) $y.dfx + fx.dy = dFx$ ist. Aus dieser Gleichung folgt sofort $dy = \frac{dFx - y\,dfx}{fx}$, oder wenn man statt y seinen Werth setzt

$$d.\frac{Fx}{fx} = \frac{fx.dFx - Fx.dfx}{(fx)^2} \ldots \quad 246)$$

Beispiele. $y = 8x^2$, gibt $dy = 24x^2 dx$

$y = \frac{9}{x^3} = 9x^{-3}$, gibt $dy = -27x^{-4} dx$

$y = 12\sqrt[5]{x^2} = 12x^{\frac{2}{5}}$, gibt $dy = 8x^{-\frac{1}{3}} dx$

$y = \frac{8x^6}{3\sqrt[5]{x^2}} = \frac{8}{3}x^{\frac{27}{5}}$, gibt $dy = \frac{72}{5}x^4\sqrt[5]{x^2} . dx$

$y = \frac{8x^3}{5\sqrt{x}} - \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{x^2} + \frac{8\sqrt[4]{x^3}}{5\sqrt[3]{x^2}}$, gibt

$$dy = (4x\sqrt{x} + \frac{12}{x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{3\sqrt[12]{x^7}}) dx$$

$y = (8x^2 - 5x^3 + 7x^5)^2 (3x^7 + 5x^2)^3 = p^2 q^3$ gesetzt, gibt $dy = 2pq^3 dp + 3p^2 q^2 dq = pq^2(2q dp + 3p dq)$, oder

$$dy = (8x^2 - 5x^3 + 7x^5)(3x^7 + 5x^2)^2 \times$$
$$[3(8x^2 - 5x^3 + 7x^5)(21x^6 + 10x)$$
$$+ 2(3x^7 + 5x^2)(16x - 15x^2 + 35x^4)] dx$$

212. Die transzendenten Funktionen

$y = \log. x$, $y = a^x$, $y = sin\, x$, $y = cos\, x$, $y = tang\, x$, u. s. f. zu differenziren, hat man für

$$y = \log. x, \quad y + dy = \log.(x + dx)$$
$$= \log. x(1 + \frac{dx}{x}) = \log. x + \log.(1 + \frac{dx}{x})$$

hievon $y = \log. x$ abgezogen, bleibt

$$dy = \log.(1 + \frac{dx}{x}) = A(\frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \ldots),$$

daher $d. \log. x = \frac{A dx}{x}$ . . . wo A den Modulus 247)

des logarithmischen Systems bedeutet, also für $A = 1$, ist $d. l\, x = \frac{dx}{x}$ . . . 248)

Ist $y = a^x$, so hat man, beiderseits Logarithmen genommen, $\lambda y = x\lambda a$, und dieses differenzirt gibt

$\frac{dy}{y} = dx.\lambda a$, oder $dy = y dx.\lambda a$, d. i.

$$d.a^x = a^x.dx\lambda a \ldots \quad 249)$$

Für $a = e$, ist $\lambda e = 1$ daher $d.e^x = e^x.dx \ldots$ 250)

Ist $y = sin\, x$, also

$y + dy = sin(x + dx)$, oder

$y + dy = sin\, x.\, cos\, dx + sin.\, dx.\, cos\, x$

Da nun dx eine unendlich kleine Größe bedeutet, deren Sinus in dx, und deren Kosinus in die Einheit übergeht, so hat man

$y + dy = sin\, x + cos\, x.\, dx$, und hieraus folgt

$$d.sin\, x = cos\, x.\, dx \ldots \quad 251)$$

Setzt man hier $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x, also $-dx$ statt dx, so wird $d\,sin(\frac{1}{2}\pi - x) = -cos(\frac{1}{2}\pi - x)\,dx$, oder

$$d.cos\, x = -sin\, x.\, dx \ldots \quad 252)$$

$d.tg\, x = d.\frac{sin\, x}{cos\, x}$, und nach 246)

$$= \frac{cos\, x.d\,sin\, x - sin\, x.d\,cos\, x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}dx = \frac{dx}{cos^2 x}$$

d. i.

$$d.tg\, x = \frac{dx}{cos^2 x} = dx\, sec^2 x \ldots \quad 253)$$

und hieraus erhält man durch Vertauschung von x mit $\frac{1}{2}\pi - x$

$$d.cot\, x = -\frac{dx}{sin^2 x} = -dx\, cosec^2 x \ldots \quad 254)$$

Ferner ist $d.sec\, x = d.\frac{1}{cos\, x} = -\frac{d.cos\, x}{cos^2 x} = \frac{sin\, x.dx}{cos^2 x}$

$= tg\, x.\, sec\, x\, dx$ d. i.

$d.sec\, x = tg\, x.\, sec\, x\, dx \ldots$, und für $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x 255)

wird hieraus

$d.\,cosec\,x = cot\,x\,cosec\,x.\,dx$ . . . 256)

$d.\,sin\,v.\,x = sin\,x.\,dx$ . . . und 257)

$d.\,cos\,v.\,x = -cos\,x\,dx$ . . . 258)

Die Formel 251) gibt

$dx = \frac{d.\,sin\,x}{cos\,x} = \frac{d\,sin\,x}{\sqrt{(1-sin^2\,x)}}$, hingegen folgt aus der Formel 253)

$dx = \frac{d\,tg\,x}{sec^2\,x} = \frac{d\,tg\,x}{1+tg^2\,x}$: setzt man in der ersteren Gleichung $sin\,x = z$, und in der letzteren $tg\,x = z$, so wird x beziehungsweise arc. $sin\,z$, und arc. $tg\,z$, daher hat man

$d.\,\text{arc.}\,sin\,z = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ . . . 259)

$d.\,\text{arc.}\,tg\,z = \frac{dz}{1+z^2}$ . . . 260)

Eben so ergibt sich aus 252) und 254)

$d.\,\text{arc.}\,cos\,z = -\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ . . . 261)

$d.\,\text{arc.}\,cot\,z = \frac{-dz}{1+z^2}$ . . ., aus 255) und 256) 262)

$d.\,\text{arc.}\,sec\,z = \frac{dz}{z\sqrt{(z^2-1)}}$ . . . 263)

$d.\,\text{arc.}\,cosec\,z = \frac{-dz}{z\sqrt{(z^2-1)}}$ . . . Ferner erhält man aus 257) und 258) 264)

$d.\,\text{arc.}\,sin\,v.\,z = \frac{dz}{\sqrt{(2z-z^2)}}$ . . . 265)

$d.\,\text{arc.}\,cos\,v.\,z = \frac{-dz}{\sqrt{(2z-z^2)}}$ . . . Endlich findet 266) man mit Zuziehung der Formel 248)

$d.\,\log.\,sin\,x = cot\,x.\,dx$ . . . 267)

$d.\,\log.\,cos\,x = -tg\,x.\,dx$ . . . 268)

$$d.\lambda tang\, x = \frac{dx}{sin\, x\, cos\, x} \qquad 269)$$

$$d.\lambda\, cot.\, x = \frac{-dx}{sin\, x.\, cos\, x} \ldots \qquad 270)$$

Beispiele. Sei $y = \lambda(5x^3 - x^2 + 8)$

so findet man $dy = \frac{(15x^2 - 2x)\,dx}{5x^3 - x^2 + 8}$

Für $y = a^{\frac{5x^2-3}{x}}$, wird $dy = \frac{5x^2+3}{x^2}\, a^{\frac{5x^2-3}{x}}\, \lambda a.\, dx$

Sei $z = \lambda(x^2 + y^2)$, so ist $dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$

Sei $y = sin^m x$, so ist $dy = m\, sin^{m-1} x.\, cos\, x\, dx.$

$y = sin\, x.\, tg\, x$, $dy = tg\, x\,(sec\, x + cos\, x)\,dx.$

$y = x\, sin\, x$, $dy = (sin\, x + x\, cot\, x)\,dx.$

$z = arc.\, tg\frac{y}{x}$, $dz = \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$

$z = r.\, arc.\, cos\frac{a-y}{a}$, $dz = \frac{r\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$

Sei $y = \frac{1}{2}\, arc.\, sin\,[2x\sqrt{(1-x^2)}]$, so ist $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$

II. Theorien der Differentialrechnung.

213. Um bei der Leibnitzischen Theorie den Vorwurf zu beseitigen, daß man, wie klein auch dx angenommen wird, statt der strengen Resultate welche die Aenderung einer Funktion zur Folge hat, nur Näherungswerthe für dieselbe erhalte, indem man bei Ausmittelung der Regeln des Differenzirens immer die höheren Potenzen von dx außer Acht läßt, stellte man die Behauptung auf „die Theorie erhält nur in dem Falle strenge Giltigkeit, wen dx wirklich $= 0$ wird." Wenn

gleich bei dieser Voraussetzung auch $dy = 0$ sein muß, so kann immerhin das Verhältniß $dy : dx$ oder der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ etwas Bestimmtes geben (112), wie auch der Werth von dx angenommen wird. Auf diese Art erhält man für $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten bloß von der Form der Funktion abhängigen Werth, welcher daher Verschwindungsquotient genannt wird. Es sei z. B. $y = Ax^n$, so ist $y+dy = A(x^n+nx^{n-1}dx+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}dx+\ldots)$, also $dy = A(nx^{n-1}dx+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}dx^2+\ldots)$ hieraus folgt $\frac{dy}{dx} = Anx^{n-1}$ übereinstimmend mit der Formel 243).

Die Regel nach welcher der Verschwindungsquotient nach dieser zuerst vom Euler aufgestellten Theorie gefunden wird, ist folgende: man setze in der vorgelegten Funktion von x überall $x+dx$ statt x, ziehe von dem Resultate die gegebene Funktion ab, theile dann durchgehends mit dx, und setze in dem Quotienten $dx = 0$. Die Ableitung der einzelnen Differenzirungsregeln ist nach dieser Theorie von jener in der Leibnitzischen Theorie nicht wesentlich verschieden: und die Formeln 243) bis 270) haben auch hier ihre Giltigkeit.

214. Man hat gegen die Eulerische Theorie die Einwendung gemacht, daß aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = p$, die andere $dy = pdx$ folge, welche streng genommen bei der gemachten Voraussetzung mit $0 = 0$ identisch ist, daß sonach die Differentialrechnung zu einer eigentlichen Nullenrechnung wird. Man hat daher, um sowohl den Begriff des Unendlichkleinen zu vermeiden,

als auch ohne die Differentiale auf Nullen zu bringen, die Differentialrechnung auf den Grenzverhältnissen zu begründen gesucht. Wie immer eine Funktion y beschaffen ist, so kann ihre Differenz ∂y als ein nach den Potenzen von ∂x fortlaufender Ausdruck betrachtet werden, den man erhält, wenn man in $y = fx$, überall $x + \partial x$ statt x setzt, und hierauf die so veränderte Funktion $y + \partial y = f(x + \partial x)$ je nachdem ihre Form beschaffen ist, entwickelt, nach den Potenzen von ∂x ordnet, und endlich $y = fx$ beiderseits abzieht: man kann also setzen $\partial y = P\partial x + Q\partial x^2 + R\partial x^3 + \ldots$, und folglich

$\frac{\partial y}{\partial x} = P + Q\partial x + R\partial x^2 + \ldots = P + S\partial x$, wenn man die Summe der in ∂x multiplizirten Größen mit S bezeichnet. Läßt man nun ∂x ohne Ende abnehmen, so erhält man, wenn dann die mit S angedeutete Reihe konvergirt nach (114)

$$lim \frac{\partial y}{\partial x} = P$$

es ist also der Koefizient des ersten Gliedes, der zur Bestimmung der Differenz einer Funktion nach den Potenzen von ∂x fortschreitenden konvergirenden Reihe die Grenze, der sich der Quotient aus der Differenz der Funktion getheilt durch die Differenz der in ihr enthaltenen veränderlichen Größe ohne Ende nähert, und den man zum Unterschiede den Differentialquotienten nennt, und seine Glieder durch Vertauschung des Buchstabens ∂ mit d bezeichnet. Man hat sonach

$$lim \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = P \qquad 271)$$

woraus durch die Multiplikation die Differentialgleichung $dy = Pdx$ zum Vorschein kommt. Um z. B. $d.Ax^n$ dieser Theorie gemäß zu finden, hat man für

$$y = Ax^n,\ y + \delta y = A(x+\delta x)^n$$
$$= A(x^n + nx^{n-1}\delta x + \tfrac{1}{2}n(n-1)\delta x^2 + \ldots)$$

daher $\frac{\delta y}{\delta x} = A(nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)\delta x + \ldots)$, woraus

$$lim\,\frac{\delta y}{\delta x} = A\,nx^{n-1} = \frac{dy}{dx},\ \text{also}$$
$$dy = A\,nx^{n-1}\,dx \text{ wie oben folgt.}$$

Die Entwickelung der Differentiale sämmtlicher einfachen Funktionen findet man nach dieser Ansicht dargestellt in B. I. 290.

215. Von dieser Theorie unterscheidet man noch die Theorie der abgeleiteten Funktionen, welche Lagransch (Lagrange) zuerst aufgestellt hat. Setzt man in einer Funktion von x überall $x + h$ statt x, so gibt die Entwickelung von $f(x+h)$ eine nach den Potenzen von h fortlaufende Reihe, welche mit fx anfangen muß, weil $f(x+h)$ für $h = o$, in fx übergeht, man setze also

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \ldots \quad \alpha)$$

wo p, q, r ... neue Funktionen von x bedeuten, und kein h mehr erhalten. Setzt man in dieser Gleichung $h + k$ statt h, so folgt

$$f(x+h+k) = fx + p(h+k) + q(h+k)^2 + r(h+k)^3 + \ldots$$

oder wenn man die einzelnen Glieder entwickelt, und Kürze halber die Faktoren von k^2, k^3 ... mit m, n ... bezeichnet, so erhält man

$$f(x+h+k) = fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \ldots$$
$$+ k(p + 2qh + 3rh^2 + 4sh^3 \ldots) + mk^2 + nk^3 \ldots \beta)$$

setzt man aber in $\alpha)$ $x + k$ statt x, und bezeichnet die Aenderungen, welche die Funktionen p, q, r ... hiedurch erleiden mit $p', p'', \ldots q', q'' \ldots r', r'' \ldots$ so, daß dann der Formel $\alpha)$ gemäß

aus p die Größe $p + p'k + p''k^2 + \ldots$
q $q + q'k + q''k^2 + \ldots$
r $r + r'k + r''k^2 + \ldots$ entsteht;

so erhält man

$f(x+k+h) = fx + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots$
$+ h(p + p'k + p''k^2 + \ldots)$
$+ h^2(q + q'k + q''k^2 + \ldots)$
$+ h^3(r + r'k + r''k^2 + \ldots) + \ldots$

oder wenn man diesen Ausdruck nach k ordnet, wird

$f(x+h+k) = fx + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$
$+ k(p + p'h + q'h^2 + r'h^3 + \ldots) + \mu k^2 + \nu k^3 \ldots \gamma)$

Setzt man die beiden für $f(x+h+k)$ erhaltenen Ausdrücke $\beta)$ $\gamma)$ einander gleich, so erhält man

$p + 2qh + 3rh^2 + 4sh^3 \ldots = p + p'h + q'h^2 + r'h^3 + \ldots$

hieraus folgt:

$q = \frac{1}{2}p'$, $r = \frac{1}{3}q'$, $s = \frac{1}{4}r'$ u. s. f. $\delta)$ Es ist leicht einzusehen, daß von den Größen fx, p, q, r, s ... jede aus der zunächst vorhergehenden auf dieselbe Art gefunden wird. Wenn man nämlich in fx die Größe $x+h$ statt x setzt, und in der so entstehenden Entwickelung den Koeffizienten der ersten Potenz von h bestimmt, so erhält man p: ferner wenn man in p, welches ebenfalls eine Funktion von x ist, statt x überall $x+k$ setzt, oder weil die Koeffizienten dieser Entwickelung p', p'' ... von k nicht abhängen, statt x überall $x+h$ setzt, so entsteht der Koeffizient der ersten Potenz von h gleich p', wovon q die Hälfte ist: und eben so erhält man r, wenn man in q wieder $x+h$ statt x setzt, und in der so entstehenden Entwickelung den Koeffizienten der ersten Potenz von h gleich q' setzt, da dann $r = \frac{1}{3}q'$ ausfällt, u. s. f.

216. Wegen dieser Gleichförmigkeit der Ableitung jeder dieser Größen fx, p, q, r, s ... aus der nächstvorhergehenden bezeichnet Lagransch die Funktion p'.

mit den Zeichen f_1x, und es heißt $p = f_1x$ die erste Ableitung der Stammfunktion fx, und weil p' die erste Ableitung von p ist, so heißt $p' = f_2x$ die zweite Ableitung von fx, und auf gleiche Weise ist die erste Ableitung von p' gleich f_3x, und heißt die dritte Ableitung von fx, u. s. f. Vergleicht man die Werthe von f_1x, f_2x, f_3x, . . . mit den beim fortgesetzten Differenziren sich ergebenden Differentialquotienten, so ersieht man ohne Schwierigkeit, daß sie identisch sind. Substituirt man aber diese Ausdrücke in den Gleichungen δ) so erhält man $p = f_1x$, $q = \frac{1}{2}p' = \frac{1}{2}f_2x$, also dessen Ableitung $q' = \frac{1}{2}f_3x$, mithin $r = \frac{1}{3}q' = \frac{1}{6}f_3x$, daher $r' = \frac{1}{6}f_4x$, und $s = \frac{1}{4}r' = \frac{1}{24}f_4x$ u. s. f. Mittelst dieser Werthe von p, q, r, s . . . erhält man aus α) den für die Analysis sehr wichtigen Ausdruck:

$$f(x+h) = fx + h.f_1x + \frac{h^2}{2!}f_2x + \frac{h^3}{3!}f_3x + \frac{h^4}{4!}f_4x + \ldots$$

welcher nach seinem Erfinder Taylor der Taylor'sche Lehrsatz genannt wird.

217. Die höheren Differentiale einer Funktion y von x werden erhalten, wenn man das bereits gefundene Differential von neuem differenziret: man bezeichnet sie mit d^2y, d^3y, d^4y . . . d^ry. Es gehet hieraus hervor, daß allgemein das nte Differential einer Funktion, dem Differentiale ihres $(n-1)$ten Differentials gleich sei, nämlich es ist

$$\left.\begin{array}{l} d^ny = d(d^{n-1}y), \text{ oder noch allgemeiner} \\ d^ry = d^{r-n}(d^ny). \end{array}\right\} 272)$$

Kömmt man beim fortgesetzten Differenziren auf ein Differentiale, das von der veränderlichen Größe unabhängig ist, so sind alle folgenden höheren Differentiale Null.

Beispiele. Für $y = x^n$, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, und dx konstant angenommen wird, erhält man $dy = nx^{n-1}\,dx$

$$d^2y = n(n-1)\,x^{n-2}dx^2$$
$$d^3y = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3,$$

und allgemein $d^ry = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)x^{n-r}dx^r$,

also $d^ny = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1.dx^n$, und

$$d^{n+1}y = 0,\ d^{n+2}y = 0,\ \text{u. s. f.}$$

Aus $y = \sin x$ ergibt sich

$dy = \cos x.dx$
$d^2y = -\sin x.dx^2$
$d^3y = -\cos x.dx^3$
$d^4y = \sin x.dx^4$
$d^5y = \cos x.dx^5$ u. s. f.

Für $y = \lambda x$ ist

$dy = x^{-1}\,dx$
$d^2y = -x^{-2}\,dx^2$
$d^3y = 1.2x^{-3}\,dx^3$
$d^4y = -1.2.3x^{-4}dx^4$
$d^5y = 1.2.3.4x^{-5}dx^5$ u. s. f.

allgemein ist

$d^{4n}\sin x = \sin x\,dx^{4n}$; $d^{4n+1}\sin x = \cos x\,dx^{4n+1}$;

$d^{4n+2}\sin x = -\sin x\,dx^{4n+2}$ und

$d^{4n+3}\sin x = -\cos x.dx^{4n+3}$, hingegen

$d^n\lambda x = \pm 1.2.3\ldots(n-1)\,x^{-n}\,dx^n$, wo das obere Zeichen für ein ungerades, das untere für ein gerades n gilt.

III. Die partiellen Differentiale.

218. Jede ganze oder gebrochene rationale Funktion einer veränderlichen Größe x ist nach 75) in der Form

$$fx = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

enthalten, wo A, B, C . . . beliebige von x unabhängige Koeffizienten, a, b, c . . . aber ganze positive Zahlen bedeuten. Eine irrationale Funktion kann mittelst des binomischen Lehrsatzes in eine Reihe nach den Potenzen von x mit ganzen positiven Exponenten, so wie jede transzendente Funktion in eine solche Reihe verwandelt

werden; daher ist obige Form der Repräsentant jeder Funktion einer veränderlichen Größe. Eine Funktion zweier veränderlichen Größen erhält zwar in Beziehung auf eine derselben, x, die Form

$$f(x,y) = Px^a + Qx^b + Rx^c + \ldots$$

allein P, Q, R ... sind dann gewisse Funktionen von y allein, deren allgemeine Form ist

$$a_1 y^\alpha + b_1 y^\beta + c_1 y^\gamma + \ldots$$ entwickelt man

daher die Produkte aus den Größen $x^a, x^b, x^c \ldots$ in die Größen P, Q, R, so erhält man offenbar Glieder von der Form $Ax^a y^\alpha$, $Bx^b y^\beta \ldots$ wo A, B, ... beliebige von x und y unabhängige Koeffizienten, a, b ... und $\alpha, \beta \ldots$ aber ganze positive Zahlen sind; es hat daher jede Funktion zweier veränderlichen Größen die Form

$$f(x,y) = Ax^a y^\alpha + Bx^b y^\beta + Cx^c y^\gamma + \ldots \quad 273)$$

219. Differenzirt man diese Funktion, und setzt $f(x,y) = u$, so folgt

$$du = aAx^{a-1}y^\alpha dx + \alpha Ax^a y^{\alpha-1} dy$$
$$+ bBx^{b-1}y^\beta dx + \beta Bx^b y^{\beta-1} dy + \ldots$$

oder wenn man die Glieder mit dem gemeinschaftlichen Faktor dx, und dy absondert, und Kürze halber

$$M = aAx^{a-1}y^\alpha + bBx^{b-1}y^\beta + cCx^{c-1}y^\gamma + \ldots$$
$$N = \alpha Ax^a y^{\alpha-1} + \beta Bx^b y^{\beta-1} + \gamma Cx^c y^{\gamma-1} + \ldots$$

macht, erhält man $du = M\,dx + N\,dy$;

es ergibt sich aber bei näherer Betrachtung, daß M das Differentiale der Funktion u sei, wenn in ihr x allein veränderlich und y konstant wäre, welches man das partielle Differentiale der Funktion u in Be-

ziehung auf x nennt, und durch das Symbol $\left(\frac{du}{dx}\right)$ bezeichnet: eben so ist N das partielle Differentiale der Funktion u nach y, also $N=\left(\frac{du}{dy}\right)$, hiernach hat man

$$du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy \qquad 274)$$

Wäre $v=f(u,z)$, so hätte man dem gemäß

$$dv=\left(\frac{dv}{du}\right)du+\left(\frac{dv}{dz}\right)dz$$

ist nun u wie vorhin gleich $f(x,y)$, so bedeutet $\left(\frac{dv}{du}\right)du$ den Theil der Funktion dv, wenn in ihr z unveränderlich wäre, mithin das Differentiale von v in Beziehung auf x und y; man hat also

$\left(\frac{dv}{du}\right)du=\left(\frac{dv}{dx}\right)dx+\left(\frac{dv}{dy}\right)dy$, und hiernach

$$dv=\left(\frac{dv}{dx}\right)dx+\left(\frac{dv}{dy}\right)dy+\left(\frac{dv}{dz}\right)dz \qquad 275)$$

u. s. f. bei Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, d. i. das Differentiale einer Funktion mehrerer veränderlichen Größen ist der Summe ihrer partiellen Differentiale gleich.

z. B. $\frac{5x^2-y}{x+y}=u$, gibt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(10x(x+y)-(5x^2-y))}{(x+y)^2}dx=\frac{(5x^2+10xy+y)}{(x+y)^2}dx$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)dy=-\frac{(x+y)+(5x^2-y)}{(x+y)^2}dy=-\frac{(5x^2+x)}{(x+y)^2}dy$$

sonach hat man

$$du=\frac{(5x^2+10xy+y)\,dx-(5x^2+x)\,dy}{(x+y)^2}$$

220. Man differenzire nun noch die Funktion M nach y und N nach x, so erhält man

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=a\alpha Ax^{a-1}y^{\alpha-1}+b\beta Bx^{b-1}y^{\beta-1}+c\gamma Cx^{c-1}y^{\gamma-1}+.$$

und

$$\left(\frac{dN}{dx}\right)=a\alpha\,Ax^{a-1}y^{\alpha-1}+b\beta\,Bx^{b-1}y^{\beta-1}+\ldots$$

oder es ist $\left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dN}{dx}\right)$ 276)

welches die Bedingungsgleichung für das Differentiale einer Funktion mit zwei veränderlichen Größen ist: wird derselben bei irgend einer Differentialgleichung

$$du=Mdx+Ndy$$

nicht Genüge geleistet, so kann sie auch kein vollständiges Differentiale bedeuten.

Stellt man statt M und N ihre Werthe her, so folgt

$$\left\{\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\right\}=\left\{\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}\right\}$$

es ist sonach einerlei, ob man von der Funktion u das partielle Differentiale nach x, und von dem Ergebnisse das partielle Differentiale nach y nimmt, oder aber ob man u zuerst nach y und dann nach x differenzirt. Allgemein hat man wenn

$\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)$, $\left(\frac{d^nu}{dy^n}\right)$ beziehungsweise das mte partielle Differentiale nach x und das nte nach y vorstellen,

$$\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)=a(a-1)\ldots(a-m+1)Ax^{a-m}y^{\alpha}=X$$

$$\left(\frac{d^nu}{dy^n}\right)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)Ax^{a}y^{\alpha-n}=Y,\text{ ferner}$$

$\left(\frac{d^n X}{dy^n}\right) = a(a-1)\ldots(a-m+1)\alpha(\alpha-1)\ldots\times$

$(\alpha-n+1)Ax^{a-n}y^{n}$, und

$\left(\frac{d^m Y}{dx^m}\right) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)a(a-1)\ldots\times$

$(a-m+1)Ax^{a-m}y^{n}$,

also $\left(\frac{d^n X}{dy^n}\right) = \left(\frac{d^m Y}{dx^m}\right)$; oder für X und Y ihre Werthe gesetzt, ist

$$\left\{\frac{d^n\left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)}{dy^n}\right\} = \left\{\frac{d^m\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)}{dx^m}\right\} \qquad 227)$$

soll also von u das mte partielle Differentiale nach x, und von dem Ergebnisse das nte partielle Differentiale nach y genommen werden, so kann man die Rechnung in beliebiger Ordnung vornehmen, mithin u früher nach x dann nach y oder umgekehrt differenziren. Aus diesem Grunde schreibt man für

$\left\{\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\right\}$, $\left(\frac{d^2 u}{dx.dy}\right)$ und allgemein für

$\left\{\frac{d^n\left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)}{dy^n}\right\}$, $\left(\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\right)$

221. Differenzirt man die Gleichung $du = M\,dx + N\,dy$; so erhält man, wenn Kürze halber $\left(\frac{dM}{dx}\right) = P$, $\left(\frac{dM}{dy}\right) = Q$, $\left(\frac{dN}{dy}\right) = R$ gesetzt wird,

$d^2 u = dM.\,dx + M d^2 x + dN.\,dy + N d^2 y$,

es ist aber $dM = \left(\frac{dM}{dx}\right)dx + \left(\frac{dM}{dy}\right)dy = P dx + Q dy$,

$$dN = \left(\frac{dN}{dx}\right)dx + \left(\frac{dN}{dy}\right)dy = Q\,dx + R\,dy,$$

sonach hat man

$$d^2u = P\,dx^2 + 2Q\,dx\,dy + R\,dy^2 + M\,d^2x + N\,d^2y.$$

Soll dieser Ausdruck die nöthige Bestimmtheit haben, so muß sowohl der Werth von $\frac{d^2x}{dx^2}$, als auch von $\frac{d^2y}{dy^2}$ bekannt sein. Gewöhnlich sind dx und dy konstant, also $d^2x = 0$ und $d^2y = 0$, unter dieser Voraussetzung wird $d^2u = P\,dx + 2Q\,dx\,dy + R\,dy^2$ oder, wenn man für P, Q, R ihre Werthe substituirt

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)dx\,dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2 \quad (278)$$

Sei z. B. $u = 12x^2y - 3y^2x + y^4$ so ist

$$M = 36x^2y - 3y^2$$
$$N = 12x^3 - 6xy + 4y^3$$
$$P = 72xy,$$
$$Q = 36x^2 - 6y$$
$$R = 12y^2 - 6x, \text{ daher}$$

$$d^2u = 72xy\,dx^2 + 12(6x^2 - y)\,dx\,dy + 6(2y - x)\,dy^2$$

Unter denselben Voraussetzungen, findet man

$$d^3u = \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)dx^3 + 3\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)dx^2dy + 3\left(\frac{d^3u}{dx\,d^2y}\right)dx\,d^2y + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)dy^3$$

und allgemein $d^mu =$

$$\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)dx^m + \binom{m}{1}\left(\frac{d^mu}{dx^{m-1}dy}\right)dx^{m-1}dy$$
$$+ \binom{m}{2}\left(\frac{d^mu}{dx^{m-2}dy^2}\right)dx^{m-2}dy^2 + \binom{m}{3}\left(\frac{d^mu}{dx^{m-3}dy^3}\right)dx^{m-3}dy^3$$
$$\ldots + \binom{m}{1}\left(\frac{d^mu}{dx\,dy^{m-1}}\right)dx\,dy^{m-1} + \left(\frac{d^mu}{dy^m}\right)dy^m$$

222. Nimmt man im Ausdrucke für d^2u, von der Funktion P das zweite Differentiale nach y, von Q das erste nach x, und das erste nach y, endlich von R das zweite Differentiale nach x, so erhält man immer

$\left(\frac{d^4u}{dx^2\,dy^2}\right)$ zum Resultate; daher ist

$$\left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)-2\left(\frac{d^2Q}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2R}{dx^2}\right)=0 \qquad 279)$$

die Bedingungsgleichung, daß ein zweites Differentiale einer Funktion zweier veränderlichen Größen vollständig sei. Bezeichnet man die Koeffizienten der Glieder in d^3u mit P, Q, R, S, ist also

$d^3u=P\,dx^3+3Q\,dx^2\,dy+3R\,dx\,dy^2+S\,dy^3$

und sucht die Werthe von

$\left(\frac{d^3P}{dy^3}\right)$, $\left(\frac{d^3Q}{dx^2dy}\right)$, $\left(\frac{d^3R}{dx\,dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)$, so überzeugt man sich, daß sie sämmtlich einander gleich sind, man hat sonach für die Vollständigkeit eines dritten Differentiales derselben Funktion die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{d^3P}{dy^3}\right)-3\left(\frac{d^3Q}{dx^2dy}\right)+3\left(\frac{d^3R}{dxdy^2}\right)-\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)=0 \qquad 280)$$

Sei z. B.

$d^2u=2(60x^3-12y^4-39xy^5)\,dx^2-xy^3(96+195xy)dxdy-4x^2y^2(36-65xy)\,dy^2$, so findet man

$$\left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)=-2(48+195xy)\,y^3=\left(\frac{d^2Q}{dx\,dy}\right)=\left(\frac{d^2R}{dy^2}\right)$$

demnach ist diese Differentialgleichung vollständig.

IV. Der Tellor'sche Lehrsatz.

223. Setzt man in der allgemeinen Form der Funktionen mit einer veränderlichen Größe x

$$fx=Ax^a+Bx^b+Cx^c+\ldots$$

$x+h$ statt x, und entwickelt sodann die Binome $(x+h)^a, (x+h)^b, (x+h)^c \ldots$ so erhält man

$$f(x+h)=Ax^a+aAx^{a-1}h+\binom{a}{2}Ax^{a-2}h^2+\binom{a}{3}Ax^{a-3}h^3+$$
$$+Bx^b+bBx^{b-1}h+\binom{b}{2}Bx^{b-2}h^2+\binom{b}{3}Bx^{b-3}h^3+$$
$$+Cx^c+cCx^{c-1}h+\binom{c}{2}Cx^{c-2}h^2+\binom{c}{3}Cx^{c-3}h^3+\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nun ist die erste vertikale Reihe $=fx$

die zweite

$$=h(aAx^{a-1}+bBx^{b-1}+cCx^{c-1}+\ldots)=h\frac{dfx}{dx}=hf_1x$$

die dritte

$$=\tfrac{1}{2}h^2[a(a-1)Ax^{a-2}+b(b-1)Bx^{b-2}+c(c-1)Cx^{c-2}+\ldots]$$
$$=\frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{d^2fx}{dx^2}=\frac{h^2}{2!}\cdot f_2x,$$ eben so findet man die vierte vertikale Reihe $=\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}=\frac{h^3}{3!}f_3x$ und allgemein die $(m+1)$te $=\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{d^mfx}{dx^m}=\frac{h^m}{m!}f_mx$

sonach hat man

$$f(x+h)=fx+h.f_1x+\frac{h^2}{2!}f_2x+\frac{h^3}{3!}f_3x+\ldots+\frac{h^m}{m!}f_mx\ldots$$

übereinstimmend mit (216)

Nimmt man h negativ, so erhalten alle Glieder mit den ungeraden Potenzen von h ein negatives Zeichen; es ist daher allgemein

$$f(x\pm h)=fx\pm hf_1x+\frac{h^2}{2!}f_2x\pm\frac{h^3}{3!}f_3x+\ldots\pm\frac{h^m}{m!}f_mx \quad (282)$$

Schreibt man aber Kürze halber statt $f_1x, f_2x, \ldots$ bloß $f_1, f_2, \ldots$ und statt

$\frac{h^2}{2!}\frac{h^3}{3!}$ ... $\frac{1}{2}!h^2$, $\frac{1}{3}!h^3$ ... so gewinnt diese Formel folgende einfachere Gestalt:

$$f(x\pm h)=f\pm hf_1+\tfrac{1}{2}!\,h^2f_2\pm\tfrac{1}{3}!\,h^3f_3\ldots,\pm\tfrac{1}{m}!\,h^mf_m\ldots$$

224. Sei $fx=\lambda x$, so hat man (217)

$$f_1x=x^{-1},\ f_2x=-x^{-2},\ f_3x=+2x^{-3},\ f_4x=-2.3x^{-4},\ldots$$

daher

$$\lambda(x+h)=\lambda x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\frac{h^4}{4x^4}+\ldots$$

macht man nun $\frac{h}{x}=y$, so folgt hieraus

$$\lambda(x+h)-\lambda x=\lambda\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lambda(1+y)=y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\ldots$$

übereinstimmend mit 81).

Sei ferner $fx=\sin x$, und $h=y$, so wird wegen (217)

$$f_1x=\cos x,\ f_2x=-\sin x,\ f_3x=-\cos x,\ f_4x=\sin x \text{ u. s. f.}$$

also

$$f(x+h)=\sin(x+y)=\sin x+y\cos x-\frac{y^2}{2}\sin x-\frac{y^3}{1.2}\cos x$$

$$+\frac{y^4}{2.3.4}\sin x+\frac{y^5}{2.3.4.5}\cos x-\frac{y^6}{2\ldots6}\sin x-\frac{y^7}{2\ldots7}\cos x+\ldots$$

setzt man in dieser Reihe $x=0$, wodurch $\sin x=0$, $\cos x=1$ wird, so erhält man

$$\sin y=y-\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^5}{2.3.4.5}-\frac{y^7}{2.3.4.5.6.7}+\ldots \text{ wie 192)}$$

setzt man aber $x=\frac{1}{2}\pi$, wodurch $\sin x=1$, $\cos x=0$ wird, so folgt

$$\cos y=1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{2.3.4}-\frac{y^5}{2.3.4.5.6}+\frac{y^8}{2\ldots8}-\ldots \text{ wie 192)}$$

225. Sei nun $u=f(x,y)$, und es gehe, x in $x+h$, y in $y+i$ über, man sucht $f(x+h,y+i)$?. Sei anfangs y konstant, so erhält man nach 281)

$$f(x+h,y) = u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots + \frac{h^m}{m!}\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)$$

Hieraus läßt sich nun für den Fall, daß auch y in $y+i$ übergeht, der Werth von $f(x+h, y+i)$ ableiten, wenn man noch in den Funktionen

$$u, \left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right), \ldots \left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)$$

$y+i$ statt y setzt; dieses gibt für jede dieser Funktionen nach 281) eine Reihe, deren Summe den gesuchten Werth der so geänderten Funktion liefert. Setzt man aber $\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right) = M$, so wird

$$\left(\frac{d^m f(x,y+i)}{dx^m}\right) = M + i\left(\frac{dM}{dy}\right) + \tfrac{1}{2}i^2\left(\frac{d^2M}{dy^2}\right) + \tfrac{1}{3!}i^3\left(\frac{d^3M}{dy^3}\right) + \ldots \frac{i^n}{2.3\ldots n}\left(\frac{d^nM}{dy^n}\right)$$

nun ist $\left(\frac{d^nM}{dy^n}\right) = \left(\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\right)$, und daher ist das allgemeine Glied in der Reihe, welche $f(x+h, y+i)$ ausdrückt

$$\frac{1}{m!\,n!}\left(\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\right) h^m i^n$$

Setzt man hier $m+n=p$, also $m=p-n$, und multiplizirt Zähler und Nenner mit $p(p-1)\ldots(p-n+1)$, so entsteht

$$\frac{p(p-1)\ldots p-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{p!}\left(\frac{d^pu}{dx^{p-n}dy^n}\right) h^{p-n} i^n$$

$$= \frac{1}{p!}\left(\frac{p}{n}\right)\left(\frac{d^pu}{dx^{p-n}dy^n}\right) h^{p-n} i^n$$

Hieraus folgen sämmtliche Glieder der gesuchten Reihe, wenn man nach und nach $1, 2, 3 \ldots p$ statt p setzt,

und für jeden dieser Werthe aus dem allgemeinen Gliede $p+1$ Werthe dadurch bildet, daß man nach und nach n gleich 0, 1, 2, 3 . . . p sein läßt. Für $p=1$, und $n=0$ erhält man hieraus $h\left(\frac{du}{dx}\right) = Ph$, setzt man $n=1$, so folgt $i\left(\frac{du}{dy}\right) = Qi$: für $p=2$, und $n=0$, 1 und 2 erhält man

$\frac{1}{2}[h^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + 2hi\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) + i^2\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)]$ oder bei den eingeführten Abkürzungen $\frac{1}{2}![Rh^2 + 2Shi + Ti^2]$: und eben so, wenn man Kürze halber

$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)=\alpha, \left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)=\beta, \left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)=\gamma, \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)=\delta$ setzt, erhält man für

$p=3$, $\frac{1}{3}![\alpha h^3 + \binom{3}{1}\beta h^2 i + \binom{3}{2}\gamma hi^2 + \delta i^3]$ u. s. f.

Man hat demnach für $f(x,y) = u$

$f(x+h, y+i) = u + \frac{1}{1}![Ph+Qi] + \frac{1}{2}![Rh^2+2Shi+Ti^2]$
$+\frac{1}{3}![\alpha h^3 + \binom{3}{1}\beta h^2 i + \binom{3}{2}\gamma hi^2 + \delta i^3] + \ldots$ 282)

Ist $v=f(x,y,z)$, und man setzt Kürze halber

$\left(\frac{dv}{dx}\right)=P, \left(\frac{dv}{dy}\right)=Q, \left(\frac{dv}{dz}\right)=R, \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)=p, \left(\frac{d^2v}{dxdy}\right)=q,$

$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)=r, \left(\frac{d^2v}{dxdz}\right)=s, \left(\frac{d^2v}{dydz}\right)=t, \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)=u, \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)=\alpha,$

$\left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right)=\beta, \left(\frac{d^3v}{dxdy^2}\right)=\gamma, \left(\frac{d^3v}{dy^3}\right)=\delta$, u. s. f.

so erhält man auf gleiche Weise

$f(x+h, y+i, z+k) = v + \frac{1}{1}![Ph+Qi+Rk]$
$+\frac{1}{2}![ph^2+2qhi+ri^2+2shk+2tik+uk^2]$
$+\frac{1}{3}![\alpha h^3+3\beta h^2 i+3\gamma hi^2+\delta i^3+3\varepsilon k^2 k+6\eta hik+\ldots]$

wo die numerischen Koeffizienten der Glieder innerhalb der Klammern mit den Koeffizienten eines Trinoms übereinstimmen. Vergl. Z. II. 135.

V. Der Mekloren'sche Lehrsatz.

226. Setzt man im Tellor'schen Lehrsatze $x = 0$, und bezeichnet die konstanten Werthe, in welche alsdann die Funktionen fx, f_1x, f_2x, ... übergehen, mit α, α_1, α_2, ... so erhält man

$fh = \alpha + h\alpha_1 + \frac{1}{2}!\, h^2\alpha_2 + \frac{1}{3}!\, h^3\alpha_3 \ldots$

oder, wenn man h mit x vertauscht, wird

$$fx = \alpha + x\alpha_1 + \tfrac{1}{2}!\, x^2\alpha_2 + \tfrac{1}{3}!\, x^3\alpha_3 + \ldots \quad 283)$$

welcher Ausdruck der Mekloren'sche Lehrsatz von seinem Erfinder Maclaurin genannt wird. Er dient dazu, eine beliebige Funktion von x in eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln, und ist immer zuläßig, so oft für $x = 0$, eine der Größen fx, f_1x, f_2x, ... nicht unendlich wird. Ist z. B. $fx = (a+x)^m$, so folgt

$f_1x = m(a+x)^{m-1}$, $f_2x = m(m-1)(a+x)^{m-2}$, u.s.f.

welche Ausdrücke für $x = 0$, beziehungsweise in a^m, ma^{m-1}, $m(m-1)a^{m-2}$ ... übergehen: hiedurch wird

$fx = (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{1}{2}m(m-1)a^{m-2}x^2 + \ldots$

die bekannte binomische Reihe.

227. Wird aber eine der Funktionen $fx, f_1x, f_2x \ldots$ für $x = 0$ unendlich, so kann man zwar die Mekloren'sche Reihe nicht unmittelbar anwenden: setzt man indessen $fx = x^k z$, wo z, eine andere Funktion von x vorstellt, und bestimmt die Konstante k so, daß für $x = 0$, keine der Funktionen z, z_1, z_2, unendlich wird, so läßt sich dieselbe Reihe immerhin brauchen. Ist z. B. $fx = cot\, x$, so gibt die Voraussetzung $x = 0$, für $cot\, x$ den Werth ∞: setzt man aber $fx = \frac{z}{x} = cot\, x$, mithin $z = x\, cot\, x = \frac{x \cos x}{\sin x}$, so geben die Formeln 191) und 192)

$$z=\frac{1-\frac{1}{2}!\,x^2+\frac{1}{4}!\,x^4-\frac{1}{6}!\,x^6+\ldots}{1-\frac{1}{3}!\,x^2+\frac{1}{5}!\,x^4-\frac{1}{7}!\,x^6+\ldots}$$

welcher Ausdruck für $x=0$ in 1 übergeht. Differenzirt man Zähler und Nenner nach einander, und setzt immer $x=0$, so erhält man leicht $\alpha_1=0$, $\alpha_2=-\frac{2}{3}$, $\alpha_3=0$ u. s. f. woraus $z=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{x^4}{3^2.5}-\ldots$, also

$$\frac{z}{x}=\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{3^2\,5}-\frac{2x^5}{3^3.5.7}-\frac{x^7}{3^3.5^2.7}\ldots$$ folgt, übereinstimmend mit 194).

228. Setzt man hingegen im Tellor'schen Lehrsatze $x=a$, so erhält man

$$f(a+h)=fa+hf_1a+\tfrac{1}{2}!\,h^2f_2a\,\tfrac{1}{3}!\,h^3f_3a+\ldots$$

und hierin $x-a$ statt h gesetzt, wird

$$fx=fa+(x-a)f_1a+\tfrac{1}{2}!\,(x-a)^2f_2a+\tfrac{1}{3}!\,(x-a)^3f_3a+\ldots 284)$$

welche Formel den Mekloren'schen Satz als einen besonderen Fall $a=0$ in sich schließt. Man kann mittelst derselben 1, 2, 3 ... n statt a setzend, z. B. sogleich den Logarithmus von x in eine nach den Potenzen von $x-1$, oder $x-2$, $x-3$, ... fortlaufende Reihe verwandeln: ferner hat man den Vortheil, da a unbestimmt ist, für jeden gegebenen Werth von x, die Größe $x-a$ so zu wählen, daß die Reihe 284) schnell konvergirt.

VI. Bestimmung der in $\frac{0}{0}$ übergehenden Funktionen.

229. Sei $\frac{fx}{\varphi x}$ eine gebrochene Funktion von x, die so beschaffen ist, daß für irgend einen Werth $x=a$, sowohl der Zähler als der Nenner derselben null wird, man

soll den Werth $\frac{fa}{\varphi a}$ bestimmen? Man hat nach dem Tellor'schen Lehrsatze

$$\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} = \frac{fx + hf_1x + \frac{1}{2}h^2f_2x + \frac{1}{3}!\,h^3f_3x + \ldots}{\varphi x + h\varphi_1x + \frac{1}{2}h^2\varphi_2x + \frac{1}{3}!\,h^3\varphi_3x + \ldots}$$

also für $x = a$, wird, da sowohl fa, als φa verschwinden,

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f_1a + \frac{1}{2}hf_2a + \frac{1}{3}!\,h^2f_3a + \ldots}{\varphi_1a + \frac{1}{2}h\varphi_2a + \frac{1}{3}!\,h^2\varphi_3a + \ldots} \quad \mu)$$

und hieraus folgt für $h = 0$

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f_1a}{\varphi_1a}.$$

230. Wird aber sowohl $f_1a = 0$, als auch $\varphi_1a = 0$, so hat man weiter aus $\mu)$, nachdem man mit $\frac{1}{2}h$ Zähler und Nenner getheilt hat,

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f_2a + \frac{1}{3}hf_3a + \frac{1}{12}h^2f_4a + \ldots}{\varphi_2a + \frac{1}{3}h\varphi_3a + \frac{1}{12}h^2\varphi_4a + \ldots} \quad \nu)$$

welches für $h = 0$ in

$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f_2a}{\varphi_2a}$ übergeht: wofern auch $f_2a = 0$, und $\varphi_2a = 0$ werden sollte, so findet man auf ähnliche Weise aus dem Ausdrucke $\nu)$ den gesuchten Werth

$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f_3a}{\varphi_3a}$, u. s. f.

Beispiele. $\frac{a^n - x^n}{a^m - x^m}$ für $x = a$ zu bestimmen?

Es ist $f_1x = -nx^{n-1}$, und $\varphi_1x = -mx^{m-1}$; daher

$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f_1a}{\varphi_1a} = \frac{n}{m}a^{n-m}$ der gesuchte Werth.

$\frac{a^x - b^x}{\lambda(1-x)}$ für $x = 0$ zu finden?

Man hat $f_1x = a^x\lambda a - b^x\lambda b$, und $\varphi_1x = -(1-x)^{-1}$, daher

$\frac{f_1 0}{\varphi_1 0} = \lambda \frac{b}{a}$.

$\frac{tg\,2x}{tg(\frac{1}{4}\pi + x)} = \frac{cot(\frac{1}{4}\pi + x)}{cot\,2x}$, für $x = \frac{1}{4}\pi$ anzugeben?

$f_1 x = sec^2(\frac{1}{4}\pi + x)$, $\varphi_1 x = \frac{1}{2} sec^2 2x$, also

$\frac{f_1 \frac{1}{4}\pi}{\varphi_1 \frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{x}$ arc. $sin\,x$ für $x = 0$ auszumitteln?

$f_1 x = \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\varphi_1 x = 1$, daher

$\frac{f_1 0}{\varphi_1 0} = a$.

Die Funktion $\frac{1 - 2x + 2x^3 - x^4}{(1-x)^3}$ für $x = 1$ zu bestimmen?

$\frac{f x}{\varphi_1 x} = \frac{2 - 6x^2 + 4x^3}{3(1-x)^2}$, welches für $x = 1$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, daher hat man $\frac{f_2 x}{\varphi_2 x} = \frac{12x - 12x^2}{6(1-x)}$, und endlich $\frac{f_3 x}{\varphi_3 x} = -\frac{12 - 24x}{6}$; mithin ist $\frac{f1}{\varphi 1} = \frac{f_3 1}{\varphi_3 1} = +2$.

VII. Größte und kleinste Werthe der Funktionen.

231. Wenn fx in Beziehung auf irgend einen Werth a von x so beschaffen ist, daß wie klein auch h angenommen wird, $fa > f(a+h)$, und zugleich $fa > f(a-h)$, so ist fa ein größter Werth der Funktion, und heißt ein Maximum: ist aber $fa < f(a+h)$ und zugleich $fa < f(a-h)$, so ist fa ein kleinster Werth der Funktion, oder ein Minimum. Wir wer-

den jenes mit M dieses mit m bezeichnen. Nach dem Tellor'schen Lehrsatze ist aber

$f(x+h) = fx + hf_1x + \frac{1}{2}h^2f_2x + \frac{1}{3}!\,h^3f_3x + \ldots$

und

$f(x-h) = fx - hf_1x + \frac{1}{2}h^2f_2x - \frac{1}{3}!\,h^3f_3x + \ldots$

man kann h immer so klein nehmen, daß das Glied hf_1x größer wird als die Summe aller folgenden Glieder, und dann erhält der Ausdruck $f(x \pm h) - fx$ das Zeichen von hf_1x, das ist, es wird $f(x+h) > fx$ und zugleich $f(x-h) < fx$; daher ist fx in beiden Fällen weder ein M noch ein m. Wird aber $f_1x = o$, für irgend einen Werth a von x, so hat man dann:

$f(a+h) = fa + \frac{1}{2}h^2f_2a + \frac{1}{3}!\,h^3f_3a + \frac{1}{4}!\,h^4f_4a + \ldots$

und

$f(a-h) = fa + \frac{1}{2}h^2f_2a - \frac{1}{3}!\,h^3f_3a + \frac{1}{4}!\,h^4f_4a - \ldots$

und wenn man h so klein nimmt, daß das Glied $\frac{1}{2}h^2f_2a$ die Summe aller folgenden Glieder übersteigt, so hat man, wenn f_2a einen positiven Werth erhält, sowohl $f(a+h) - fa$, als auch $f(a-h) - fa$ positiv; daher $f(a+h) > fa$ und zugleich $f(a-h) > fa$ es ist also dann fa ein m: erhält aber f_2a einen negativen Werth, so ist sowohl $f(a+h) - fa$ als auch $f(a-h) - fa$ negativ, und sonach $f(a+h) < fa$, und zugleich $f(a-h) < fa$ folglich ist dann fa ein M.

232. Wofern der Werth $x = a$, der aus der Gleichung $f_1x = o$ gezogen ist, auch zugleich f_2x null macht, so untersuche man die folgenden Glieder der Reihe, man hat nämlich bei dieser Voraussetzung

$f(a+h) = fa + \frac{1}{3}!\,h^3f_3a + \frac{1}{4}!\,h^4f_4a + \frac{1}{5}!\,h^5f_5a + \ldots$

und

$f(a-h) = fa - \frac{1}{3}!\,h^3f_3a + \frac{1}{4}!\,h^4f_4a - \frac{1}{5}!\,h^5f_5a + \ldots$

und man kann wie vorher schließen, daß kein M oder m Statt findet, wenn nicht $f_3a = o$ ist, und daß ferner, wenn $f_3a = o$ ist, fa ein m wird, wenn f_4a positiv, da-

gegen aber fa ein M wird, wenn f_4a negativ ausfällt. Wird $f_4a = o$, so hängt auf gleiche Weise die Beurtheilung des M und m von dem Werthe der Größe f_5a und von dem Vorzeichen der Größe f_6a ab. Ueberhaupt nehme man an, daß in der Reihe

$$f(x \pm h) = fx \pm hf_1x + \tfrac{1}{2}h^2f_2x \pm \ldots$$
$$\pm \tfrac{1}{m}!\, h^m f_m x + \ldots$$

wenn man $f_1x = o$ setzt, wodurch $x = a$ gefunden wird, alle Glieder bis zu dem mten Null werden, so ist dann

$$f(a \pm h) = fa \pm \tfrac{1}{m}!\, h^m f_m a + \ldots \varrho)$$

und es ist $f(a + h) > fa$, zugleich aber $f(a - h) < fa$, d. h. es gibt in diesem Falle weder ein M noch ein m, wenn nicht $f_m a = o$ ist. Ist aber $f_m a = o$, so wird, da das folgende Glied des Ausdruckes ϱ) immer positiv ist, entweder $f(a + h) > fa$, und zugleich $f(a - h) > fa$, oder $f(a + h) < fa$, und zugleich $f(a - h) < fa$, je nachdem $f_{m+1}a$ positiv oder negativ ausfällt.

233. Läßt sich aber endlich aus der Gleichung

$$f_1x = \frac{dfx}{dx} = o$$

der Werth von x nicht bestimmen, sondern, muß man um einen Werth zu erhalten, den Bruch umstürzen, und also $\frac{dx}{dfx} = o$ setzen, so kann man nur dadurch erfahren, ob dieser Werth $x = a$ die Funktion zu einem M oder m macht, wenn man für eine beliebig kleine Größe h die 2 Werthe $f(a + h)$, und $f(a - h)$ berechnet, und hierauf bestimmt, ob fa zugleich größer, oder zugleich kleiner ist als die beiden gefundenen Nachbarwerthe.

234. Beispiele. Sei $fx = (b - x)x$, so ist $f_1x = b - 2x$, also $b - 2x = o$ gesetzt, wird $x = \frac{1}{2}b$; da nun $f_2\,\frac{1}{2}b = -2$ ist, so gibt der gefundene Werth

ein M. Sei $fx = \frac{3x-5}{x^2-1}$: man hat $f_1x = \frac{10x-3x^2-3}{(x^2-1)^2}$ und $f_2x = 2.\frac{3x^3-15x^2+9x-5}{(x^2-1)^3}$.

Es wird aber $f_1x = 0$, für $x = 3$, und für $x = \frac{1}{3}$, ferner ist $f_2 3 = -\frac{1}{8}$, $f_2\frac{1}{3} = +\frac{81}{8}$, daher hat man $f3 = \frac{1}{2}$ zum M, und $f\frac{1}{3} = \frac{9}{2}$ zum m. In der That sind die benachbarten Werthe z. B. $f\frac{1}{2}$ und $f\frac{1}{4}$ größer als $\frac{9}{2}$.

Fällt man aus zwei gegebenen Punkten auf eine ebenfalls gegebene Gerade die Senkrechten, die a und und b heißen mögen, und bezeichnet das zwischenliegende Stück der Geraden mit c, so ist, den Abstand irgend eines zwischenliegenden Punktes der Geraden $= x$ gesetzt, die Entfernung desselben von den gegebenen Punkten beziehungsweise $\sqrt{(a^2+x^2)}$ und $\sqrt{(b^2+(c-x)^2)}$. Soll nun für den gesuchten Punkt die Summe dieser Entfernungen ein m werden, so hat man die Bedingungsgleichung $\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} - \frac{c-x}{\sqrt{(b^2+(c-x)^2)}} = 0$

folglich ist, wenn man alles auf gleiche Benennung gebracht hat

$x\sqrt{(b^2+(c-x)^2)} - (c-x)\sqrt{(a^2+x^2)} = 0$ oder quadrirt

$x^2(b^2+(c-x)^2) = (c-x)^2(a^2+x^2)$, woraus

$b^2x^2 = (c-x)^2a^2$, also $bx = (c-x)a$, oder

$x = \frac{ac}{a+b}$ folgt. Bezeichnet man die Winkel, welche diese Entfernungen mit der Geraden c bilden, mit α und β, so hat man offenbar:

$tg\,\alpha = \frac{a}{x} = \frac{a+b}{c}$, und $tg\,\beta = \frac{b}{c-x} = \frac{a+b}{c}$, also $\alpha = \beta$.

Die Natur, welche den auf einen Spiegel einfallenden Lichtstrahl so reflektiren läßt, daß der Einfalls-

winkel dem Reflexionswinkel gleich sei, befolgt in dieser ihrer Erscheinungen das Gesetz der Sparsamkeit, weil dann der vom Lichtstrahle zurückgelegte Weg immer ein m wird.

In einen Kegel Fig. 1. dessen Höhe $AD = h$, und der Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche $BC = 2r$ ist, soll ein Cylinder EFGH eingeschrieben werden, dessen Inhalt ein M wäre. Sei $DJ = x$ dessen unbekannte Höhe, so hat man $h : h - x = 2r : EF$

also ist der Durchmesser des Cylinders $EF = \frac{2r}{h}(h - x)$.

Hieraus folgt dessen Innhalt

$$\frac{r^2}{h^2}(h - x)^2 \pi . x = \frac{r^2}{h^2}\pi(h^2 x - 2hx^2 + x^3)$$

das Differentiale dieses Ausdrucks gleich Null gesetzt gibt $h^2 - 4hx + 3x^2 = 0$, woraus $x = \frac{2}{3}h \pm \frac{1}{3}h$ folgt; es ist also entweder $x = h$, was ein m gibt, oder $x = \frac{1}{3}h$. Differenzirt man den Ausdruck wieder, so findet sich $\frac{r^2\pi}{h^2}(-4h + 6x)$, welches für $x = \frac{1}{3}h$ in $-\frac{2r^2\pi}{h}$ übergeht, also gibt $x = \frac{1}{3}h$ wirklich ein M.

235. Ist $f(x, y) = 0$ eine unentwickelte Funktion von x und y gegeben, so läßt sich der Werth von x, für welchen y ein M oder m wird, finden, ohne daß man den Werth von y aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ zu suchen braucht. Ist nämlich $Mdx + Ndy = df(x, y)$ so hat man so fort $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = 0$, mithin $M = 0$, und wenn man hieraus den Werth $x = a$ entwickelt, der dieser Gleichung Genüge leistet, so erhält man den zugehörigen Werth für ein M oder m: welches von beiden aber Statt hat, erkennt man immer aus dem Vorzeichen,

welches $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = a$ erhält. Z. B. Sei $y^3 - axy + x^2 = 0$, so hat man $M = -ay + 3x^2$, also $ay = 3x^2$ und $y = \frac{3x^2}{a}$: wird dieser Werth in der gegebenen Gleichung gesetzt, so wird diese $\frac{x^3}{a^3}(27x^3 - 2a^3) = 0$, folglich ist entweder $x = 0$, oder $27x^3 = 2a^3$, woraus $x = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$ folgt. Nun ist $d^2 f(x, y) = d[(3y^2 - ax)\frac{dy}{dx} - ay + 3x^2] = 0$ oder $(6y\,dy - a\,dx)\frac{dy}{dx} + (3y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} - a\,dy + 6x\,dx = 0$ und hieraus folgt

$$(3y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 6y.\frac{d^2y}{dx^2} - 2a.\frac{dy}{dx} + 6x = 0$$

sonach, wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6x}{3y^2 - ax} = -\frac{6a^2}{27x^3 - a^3},$$ und für $x = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$ erhält man $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{a}$ negativ, daher ist $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ derjenige Werth, für welchen $f(x, y) = 0$ ein M wird.

236. Man hat nach 282) $f(x + h, y + i) = u + Ph + Qi + \frac{1}{2}(Rh^2 + 2Shi + Ti^2) + \ldots$ da h und i beliebige Größen bedeuten können, so setze man $h = \alpha t$, $i = \beta t$, hiedurch wird

$f(x + \alpha t, y + \beta t) - u = (P\alpha + Q\beta)t + \frac{1}{2}(R\alpha^2 + 2S\alpha\beta + T\beta^2)t^2 + \ldots$ und es ist hier ebenfalls möglich für t einen so kleinen Werth anzunehmen, daß das erste Glied, worin die erste Potenz von t vorkömmt, die Summe aller folgenden übertrifft,

folglich wird $f(x+\alpha t, y+\beta t) - u$ positiv oder negativ, wenn $(P\alpha+Q\beta)t$ positiv oder negativ ausfällt, daher gibt es in diesem Falle kein M oder m, wofern nicht $(P\alpha+Q\beta)t=0$, und also $P\alpha+Q\beta=0$ ist. Da α und β von P und Q nicht abhängen, so kann dieser Gleichung nur Genüge geschehen, daß man $P=0$, und $Q=0$ setzt. Ob aber die hieraus erhaltenen Werthe von x und y die Funktion u zu einem M oder m machen, entscheidet sich aus dem Vorzeichen des Gliedes $\frac{1}{2}(R\alpha^2+2S\alpha\beta+T\beta^2)t^2$ (wie 120): ist es positiv, so wird u ein m, ist es hingegen negativ, so wird u ein M. Gibt man aber diesem Ausdrucke die Form

$$\frac{1}{2}R\left(\alpha+\frac{\beta S}{R}\right)^2+\frac{\beta^2}{2}\left(T-\frac{S^2}{R}\right)$$

oder auch

$$\frac{1}{2}T\left(\beta+\frac{\alpha S}{T}\right)^2+\frac{1}{2}\alpha^2\left(R-\frac{S^2}{T}\right),$$

so erhellet, daß, da $\left(\alpha+\frac{\beta S}{R}\right)^2$, $\frac{\beta^2}{2}$, $\left(\beta-\frac{\alpha S}{T}\right)^2$, und $\frac{\alpha^2}{2}$ immer positiv sind, das Zeichen des Ausdruckes bloß von dem Zeichen der Größen $R, T-\frac{S^2}{R}$, T und $R-\frac{S^2}{T}$ abhängt. Ist nämlich R und T positiv und zugleich RT gleich oder größer als S^2, so findet ein m Statt: dagegen aber ein M, wenn R und T negativ, und dabei RT gleich oder größer ist als S^2: weil im letzteren Falle das Glied mit dem Faktor $R-\frac{S^2}{T}$ in $\frac{1}{2}\alpha^2\left(-R+\frac{S^2}{T}\right)$ übergeht, und daher negativ wird, wenn $R>\frac{S^2}{T}$, oder wenn $RT>S^2$ ist.

237. Beispiel. Die Oberfläche eines oben offenen Gefäßes, welches die Form eines Parallelopipedes hat, ist gleich a^2, man sucht die Abmessungen desselben,

wenn der Innhalt ein M oder m betragen soll? Bezeichnet man die Länge des Gefäßes mit x, die Breite mit y, und die Höhe mit z, so ist die Oberfläche

$a^2 = xy + 2(x+y)z$, folglich

$z = \frac{-xy + a^2}{2(x+y)}$, und der Innhalt

$u = xyz = \frac{a^2 xy - x^2 y^2}{2(x+y)}$, hieraus erhält man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{(x+y)(a^2 y - 2xy^2) - a^2 xy + x^2 y^2}{2(x+y)^2}$$

$$= -\frac{x^2 y^2 + a^2 x^2 - 2xy^3}{2(x+y)^2}$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{(x+y)(a^2 x - 2x^2 y) - a^2 xy + x^2 y^2}{2(x+y)^2}$$

$$= \frac{-x^2 y^2 + a^2 x^2 - 2yx^3}{2(x+y)^2}$$

Da nun sowohl $\left(\frac{du}{dx}\right)$ als auch $\left(\frac{du}{dy}\right)$ null sein muß, so folgt hieraus $a^2 = x^2 + 2xy$ und $a^2 = y^2 + 2xy$, daher $x = y$, und $a^2 = 3x^2 = 3y^2$, also $x = y = \sqrt{\frac{1}{3}}a^2$, und hiernach $z = \frac{3x^2 - x^2}{4x} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}a^2$. Das gesuchte Parallelopiped hat demnach ein Quadrat mit der Seite $a\sqrt{\frac{1}{3}}$ zur Grundfläche, und dessen halbe Seite zur Höhe. Ferner findet man

$$R = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = d\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$= \frac{(-2xy^2 - 2y^3)(x+y)^2 - 2(x+y)(x^2 - a^2 + 2xy)y^2}{2(x+y)^4}$$

$$= -\frac{y^2(x+y)^2 - y^2(x^2 - a^2 + 2xy)}{(x+y)^3}$$, welches für

$x = y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ in $-\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{3}}$ übergeht. Eben so ergibt

sich $T = \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = -\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, und $S = \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$ $= -\frac{1}{4}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, folglich ist $RT = \frac{2}{4}a^2$, und $S^2 = \frac{1}{16}a^2$, also $RT > S^2$; mithin ist der für u gefundene Werth ein Maximum.

238. Sind zwischen den veränderlichen Größen x, y, z zwei Gleichungen gegeben, und man frägt nach denjenigen Werthen von x und y welche z zu einem M oder m machen, so differenzire man die beiden Gleichungen, indem man z und y als Funktionen von x betrachtet, und setze den Bedingungen des M und m gemäß $\frac{dz}{dx} = 0$, so erhält man zwei Gleichungen, welche außer den Größen x, y, z nur noch $\frac{dy}{dx}$ enthalten; man kann also aus denselben $\frac{dy}{dx}$ hinwegschaffen, dieß gibt eine Gleichung zwischen x, y, und z allein, welche mit den zwei gegebenen Gleichungen verbunden, zu der Bestimmung der Werthe von x, y, z welchen die größten und kleinsten Werthe von z zugehören, hinreichen wird: hierauf bestimme man, um über das M oder m entscheiden zu können, (nach 235) den Werth von $\frac{d^2z}{dx^2}$, wodurch die Aufgabe gelöset wird, ohne die in manchen Fällen umständlichen Eliminationen einer der Größen x, y, z aus den beiden gegebenen Gleichungen zu verrichten. Man soll z. B. unter allen Vierecken, deren Seiten a, b, m, n heißen mögen, dasjenige bestimmen, dessen Innhalt am größten ist? Bezeichnet man die Gegenwinkel des Vierecks, die beziehungsweise von den Seiten a, b und m, n eingeschlossen werden mit x und y, und den Innhalt mit z, so hat man $z = \frac{1}{2}(ab.\sin x + mn.\sin y)$: man denke

sich die Diagonale gezogen, so ist ihr Quadrat sowohl $a^2 + b^2 - 2ab\cos x$ als auch $m^2 + n^2 - 2mn\cos y$, daher $a^2 + b^2 - 2ab\cos x = m^2 + n^2 - 2mn\cos y$; differenzirt man diese zwei Gleichungen, so folgt

$$2.\ \frac{dz}{dx} = ab\cos x + mn\frac{dy}{dx}\cos y \text{ und}$$

$2ab\sin x = 2mn.\frac{dy}{dx}\sin y$, setzt man hier $\frac{dz}{dx} = 0$ so geben diese Ausdrücke

$$ab\cos x + mn.\frac{dy}{dx}\cos y = 0, \text{ und } ab\sin x - mn\frac{dy}{dx}\sin y = 0$$

um hieraus $\frac{dy}{dx}$ wegzuschaffen, multiplizire man die erste dieser Gleichungen mit $\sin y$, die andere mit $\cos y$, und addire die Produkte, so erhält man

$ab\sin x\cos y + ab\cos x\sin y = 0$ oder $ab\sin(x+y) = 0$: es ist daher $x+y = 0$, oder $x+y = \pi$, da im Vierecke stets $x+y < 2\pi$ ist. Differenzirt man obige Gleichungen noch einmahl, so ergibt sich

$$2\frac{d^2z}{dx^2} = -ab\sin x + mn\cos y\frac{d^2y}{dx^2} - mn\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\sin y,$$

ferner

$$0 = ab\cos x - mn\sin y\frac{d^2y}{dx^2} - mn\frac{dy}{dx}\cos y$$

multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin y$, die zweite mit $\cos y$ und addirt sie, so folgt

$$\frac{2d^2z}{dx^2}\sin y = ab(\cos x\cos y - \sin x\sin y) - mn\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= ab\cos(x+y) - \frac{a^2b^2\sin^2 x}{mn\sin^2 y}, \text{ und da}$$

$x+y = \pi$ ist, so wird $\cos(x+y) = -1$, $\sin y = \sin x$, folglich

$\frac{2d^2z}{dx^2} = -\frac{ab}{\sin x} - \frac{a^2b^2}{mn \sin x}$ eine negative Größe; sonach ist unter allen Vierecken von gegebenen Seiten dasjenige am größten, um welches ein Kreis kann beschrieben werden.

VIII. Zerlegung gebrochener Funktionen.

239. Sei $\frac{fx}{\varphi x}$ eine echte gebrochene Funktion von x, und der Nenner φx ein Produkt der Faktoren $a - bx$ und ψx, wo ψx irgend eine Funktion von x anzeigt, man soll die Bruchfunktion in zwei Brüche zerlegen, deren Nenner beziehungsweise $a - bx$ und ψx sind, daß die Summe dieser Brüche, die man Partialbrüche nennt, der gegebenen Bruchfunktion gleich sei? Man setze

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{A}{a-bx} + \frac{Fx}{\psi x},$$ so erhält man

$$fx = A\psi x + (a-bx)Fx, \text{ daher}$$

$$Fx = \frac{fx - A\psi x}{a-bx}$$

weil aber Fx eine ganze Funktion von x sein soll, so muß $fx - A\psi x$ den Nenner $a-bx$ als Faktor enthalten, also wird $fx - A\psi x$ null, wenn man $a - bx = o$ setzt, mithin für $x = \frac{a}{b} = \alpha$, dieß gibt

$f\alpha - A\psi\alpha = o$, woraus $A = \frac{f\alpha}{\psi\alpha}$ folgt. Ohne die Funktion ψx zu kennen, findet man A, wenn man statt ψx ihren Werth $\frac{\varphi x}{a-bx}$ substituirt: hiedurch wird

$A = \frac{f\alpha(a-bx)}{\varphi x}$, welches für $x = \alpha$ in $\frac{o}{o}$ übergeht; folg-

lich wird nach (229), wenn man $d\varphi x = \varphi_1 x . dx$ setzt, der eigentliche Werth von

$A = \frac{f\alpha\, d(a-bx)}{\varphi_1 x . dx} = \frac{-bf\alpha}{\varphi_1 \alpha}$. Wenn man daher 285) statt des Nenners einer Bruchfunktion dessen Ableitung $\varphi_1 x$ nimmt, und dann in dem Bruche überall α statt x setzt, und das Ergebniß mit der Ableitung von $a-bx$ multiplizirt, so erhält man den zugehörigen Zähler des Partialbruches.

240. Beispiele a. Sei $\frac{1}{x^3+3x^2+2x}$ in Partialbrüche zu zerlegen: man setze

$\frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{D_1}{x} + \frac{D_2}{x+1} + \frac{D_3}{x+2}$, und bestimme D_1, D_2, D_3 nach 239), oder aber man setze zur Bestimmung von D_1 $x = 0$, also $\alpha = 0$, und $f\alpha = 1$: dieß gibt $\psi x = (x+1)(x+2)$, also $\psi\alpha = 2$, daher $D_1 = \frac{f\alpha}{\varphi\alpha} = \frac{1}{2}$: eben so findet man für D_2, $\alpha = -1$, also $\psi x = x(x+2)$, $\psi\alpha = -1$, mithin $D_2 = -1$, endlich für D_3 ist $\alpha = -2$, $\psi x = x(x+1)$, $\psi\alpha = +2$, sonach $D_3 = \frac{1}{2}$; hiernach erhält man

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$$

b. $\frac{3+2x}{(2x-3)(5x-4)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{5x-4}$, gibt erstlich $\alpha = \frac{3}{2}$, $f\alpha = 6$, und $\psi\alpha = \frac{7}{2}$, demnach $A = \frac{12}{7}$, ferner $\alpha = \frac{4}{5}$, $f\alpha = \frac{23}{5}$, $\psi\alpha = -\frac{7}{5}$, also $B = -\frac{23}{7}$, daher

$$\frac{3+2x}{(2x-3)(5x-4)} = \frac{1}{7}\left(\frac{12}{2x-3} - \frac{23}{5x-4}\right)$$

c. Es ist $2x-5$ ein Faktor der Funktion $2x^3-5x^2-18x+45 = \varphi x$ man soll unabhängig von ihrem anderen Faktor ψx den zugehörigen Zähler A finden, daß die Gleichung

$$\frac{5x^2-3x+12}{2x^3-5x^2-18x+45}=\frac{A}{2x-5}+\frac{Fx}{\psi x}$$

Statt hat. Setzt man $2x-5=0$, so folgt nach 285) $\alpha=\frac{5}{2}$, und $f\frac{5}{2}=\frac{143}{4}$, ferner ist $\varphi_1 x=6x^2-10x-18$, also $\varphi_1\frac{5}{2}=-\frac{23}{4}$, und $b=2$, demnach wird $A=-\frac{143}{11}=-13$ der gesuchte Werth.

241. Enthält die Funktion φx den Faktor $s-bx=y$ mehrere Mahl, wenn also $\varphi x=y^m\psi x$ ist, so setze man

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{A_1}{y^m}+\frac{A_2}{y^{m-1}}+\frac{A_3}{y^{m-2}}+\ldots+\frac{A_m}{y}+\frac{Fx}{\psi x}$$

wo $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ von x unabhängige Größen bedeuten, und bringe Alles auf gleiche Benennung, so wird

$$fx=\psi x[A_1+A_2y+A_3y^2+\ldots+A_my^{m-1}]+y^mFx$$

und hieraus folgt

$$Fx=\frac{fx-\psi x[A_1+A_2y+A_3y^2+\ldots+A_my^{m-1}]}{y^m}$$

da nun Fx eine ganze Funktion sein soll, so muß der Zähler dieses Ausdrucks, und folglich auch, wenn man Kürze halber $\frac{fx}{\psi x}=\mathfrak{F}x$ setzt,

$$\mathfrak{F}x-A_1-A_2y-A_3y^2-A_4y^3-\ldots-A_my^m=X$$

durch y^m theilbar sein. Man erhält aber, wenn man nach einander differenziret, wegen $dy=-bdx$

$$\frac{dX}{dx}=\mathfrak{F}_1x+bA_2+2byA_3+3by^2A_4+\ldots$$
$$+(m-1)by^{m-2}A_m$$
$$\frac{d^2X}{dx^2}=\mathfrak{F}_2x-2b^2A_3-2.3b^2yA_4\ldots$$
$$-(m-1)(m-2)b^2y^{m-3}A_m$$
$$\frac{d^3X}{dx^3}=\mathfrak{F}_3x+2.3.b^3A_4+\ldots$$
$$+(m-1)(m-2)(m-3)b^3y^{m-4}A_m \text{ u. s. f. endlich}$$

$$\frac{d^{m-1}X}{dx^{m-1}} = \mathfrak{F}_{m-1}x \pm (m-1)(m-2)(m-3)\ldots 3.2.1.b^{m-1}A_m$$

setzt man in diesen Gleichungen $\frac{b}{a} = \alpha$ statt x, so verschwindet hiedurch der Ausdruck X, und dessen $m-1$ Differentiale; man hat dann

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{F}\alpha - A_1 = 0, & \text{woraus folgt } A_1 = \mathfrak{F}\alpha \\ \mathfrak{F}_1\alpha + bA_2 = 0 & A_2 = -b^{-1}.\mathfrak{F}_1\alpha \\ \mathfrak{F}_2\alpha - 2b^2A_3 = 0 & A_3 = \tfrac{1}{2}!\, b^{-2}.\ \mathfrak{F}_2\alpha \\ \mathfrak{F}_3\alpha + 2.3b^3A_4 = 0 & A_4 = -\tfrac{1}{3}!\, b^{-3}\mathfrak{F}_3\alpha \end{array}\right\} 286)$$

und zuletzt

$$\mathfrak{F}_{m-1}\alpha \pm 2.3.4\ldots(m-1)b^{m-1}A_m = 0$$

also $A_m = \pm\frac{1}{m-1}!\, b^{-(m-1)}\mathfrak{F}_{m-1}\alpha$

wodurch die m Konstanten $A_1, A_2, \ldots A_m$ sich bestimmen lassen.

242. Beispiele. a. $\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$ zu zerlegen? Setzt man

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1},$$

so ist erstlich $\alpha = 1$, $f\alpha = 1$, $\psi\alpha = 4$, also $A_1 = \mathfrak{F}\alpha = \frac{1}{4}$; sodann hat man $\mathfrak{F}_1 x = \frac{2x(x+1)-2x^2}{(x+1)^3}$, und $\mathfrak{F}_1\alpha = \frac{1}{4}$, mithin $A_2 = \frac{1}{4}$: ferner gibt $x+1=0$, $\alpha = -1$, $f\alpha = 1$, $\psi\alpha = 4$, daher $B_1 = \frac{1}{4}$, und $\mathfrak{F}_1 x = \frac{2x(x-1)-2x^2}{(x-1)^3}$, $\mathfrak{F}_1\alpha = -\frac{1}{4} = B_2$

Hiernach ist

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-1}\right)$$

b. $\frac{5x+3}{(x-5)^3(x^2-9)}$ zu zerlegen? Man setze

$$\frac{5x+3}{(x-5)^3(x^2-9)} = \frac{A_1}{(x-5)^3} + \frac{A_2}{(x-5)^2} + \frac{A_3}{x-5} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-3};$$

so erhält man $fx = 5x+3$, und $y = -5+x$, $=5$, $\psi x = x^2-9$, also $Fx = \frac{5x+3}{x^2-9}$, $F_1x = \frac{-5x^2+6x+45}{(x^2-9)^2}$, $F_2x = \frac{10x^3+18x^2+270x+54}{(x^2-9)^3}$: hieraus ergibt sich $A_1 = F\alpha = \frac{1}{4}$, $A_2 = -\frac{25}{32}$, $A_3 = \frac{97}{256}$: da ferner $x+3=0$ gesetzt, $\alpha = -3$ gibt, wodurch $\psi\alpha = 8^3.6$, $f\alpha = -12$ wird, so erhält man $B = -\frac{1}{256}$, und eben so $C = -\frac{3}{32}$. Man hat also

$$\frac{5x+3}{(x-5)^3(x^2-9)} = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{(x-5)^3} - \frac{25}{8(x-5)^2} + \frac{97}{64(x-5)} - \frac{1}{64(x+3)} - \frac{3}{2(x-3)}\right)$$

Zur Uebung zerlege man noch folgende Bruchfunktionen:

c. $$\frac{2x^3-4x^2-x+2}{2x^4+3x^3-3x^2-7x-3} = \frac{2x^3-4x^2-x+2}{(x+1)^3(2x-3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{(x+1)^3} - \frac{59}{5(x+1)^2} + \frac{132}{25(x+1)} - \frac{14}{25(2x-3)}\right)$$

d. $$\frac{2x^2-3x+1}{x^3(x-1)^2(2x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

243. Es sei $\frac{fx}{\varphi x}$ eine echt gebrochene Funktion, und $\varphi x = (a+bx+cx^2)\psi x$ vom nten Grade, man soll die Bruchfunktion in Partialbrüche zerlegen? Man setze $\frac{fx}{\varphi x} = \frac{P}{a+bx+cx^2} + \frac{Fx}{\psi x}$: da ψx eine Funktion vom $n-2$ten Grade ist, so ist Fx im allgemeinen vom

n—3ten Grade, so wie P vom ersten Grade, und letztere hat die Form Ax + B, sonach ist

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{Ax+B}{a+bx+cx^2} + \frac{Fx}{\psi x}$$

woraus durch Reduktion beider Brüche auf gleiche Benennung folgt

$fx = (Ax+B)\psi x + (a+bx+cx^2)Fx$: dieß gibt

$$Fx = \frac{fx-(Ax+B)\psi x}{a+bx+cx^2};$$ es ist also $fx-(Ax+B)\psi x$ 287)

durch $a+bx+cx^2$ ohne Rest theilbar, und wird für die beiden aus der Gleichung $a+bx+cx^2 = o$ gezogenen Werthe von x, die wir mit α und β bezeichnen wollen, gleich Null. Daher ist $f\alpha-(A\alpha+B)\psi\alpha = o$, und $f\beta-(A\beta+B)\psi\beta = o$: aus welchen Gleichungen sich A und B bestimmen lassen, man findet nämlich

$$A = \frac{\frac{f\alpha}{\psi\alpha}-\frac{f\beta}{\psi\beta}}{\alpha-\beta}, \text{ und } B = \frac{\frac{\alpha f\beta}{\psi\beta}-\frac{\beta f\alpha}{\psi\alpha}}{\alpha-\beta} \quad 288)$$

Da die Wurzeln α und β bloß durch das Vorzeichen der Wurzelgröße unterschieden sind, so wird man allemahl aus $f\alpha$, $\psi\alpha$, unmittelbar $f\beta$, $\psi\beta$ mittelst Aenderung der Vorzeichen bestimmen können.

Beispiel. Sei $\frac{x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$ zu zerlegen: man setze

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Fx}{x^2+1};$$ die Gleichung $x^2+x+1 = o$ gibt aufgelößt

$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, und

$\beta = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$, ferner ist $fx = x+1$, $\psi x = x^2+1$ daher $f\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $\psi\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, und wenn man in diesen Werthen das Zeichen der Wurzelgröße ändert, erhält man

$f\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $\psi\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, daher $\alpha - \beta = \sqrt{-3}$, und nach Substitution dieser Werthe in 288) findet sich

$$A = \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-3}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}\right) : \sqrt{-3} = 1, \text{ und}$$

$$B = \left(\frac{-\frac{1}{4}(1-\sqrt{-3})^2}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})} + \frac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{-3})^2}{\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})}\right) : \sqrt{-3}$$
$$= \left(\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{-3})^3 - \tfrac{1}{8}(1-\sqrt{-3})^3\right) : \sqrt{-3} = 0,$$

endlich gibt 287)

$$Fx = \frac{-x^3+1}{x^2+x+1} = -x+1; \text{ folglich ist}$$

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{1-x}{x^2+1}$$

244. Der Nenner der gebrochenen Funktion enthalte den quadratischen Faktor $x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2$, man soll den ihm zugehörigen Partialbruch bestimmen? Da $x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2 = 0$, $x = a(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$ gibt, so hat man

$\alpha = a(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$, $\beta = a(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$;

setzt man also

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{Fx}{\psi x}, \text{ so erhält man nach 285)}$$

$$A = \frac{f\alpha}{\varphi_1\alpha}, \quad B = \frac{f\beta}{\varphi_1\beta}.$$

Enthält nun fx und $\varphi_1 x$ Potenzen von x wie x^n, so ist statt x^n der Werth

$$a^n(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = a^n(\cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1})$$

zu setzen, wodurch $f\alpha$ und $\varphi_1\alpha$ einen möglichen und einen unmöglichen Theil erhalten, jener entsteht durch die Substitution von $a^n\cos n\varphi$ statt x^n, dieser hingegen durch die Substitution von $a^n\sin n\varphi$ statt x^n. Bezeichnet man die Ergebnisse dieser Substitutionen mit P und p hinsichtlich der Größe fx, und durch Q und q hinsichtlich

$\varphi_1 x$; so erhält man $A = \frac{P + p\sqrt{-1}}{Q + q\sqrt{-1}}$, und hieraus durch Veränderung der Zeichen des unmöglichen Theiles $B = \frac{P - p\sqrt{-1}}{Q - q\sqrt{-1}}$. Bringt man aber die Partialbrüche $\frac{A}{x - \alpha}$ und $\frac{B}{x - \beta}$ auf dieselbe Benennung, und setzt statt α und β ihre Werthe, so folgt

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{(A+B)x - (A+B)a\cos\varphi + (A-B)a\sin\varphi\sqrt{-1}}{x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2} + \frac{Fx}{\psi x}$$

Drückt man den Zähler des ersten Partialbruches Kürze halber durch $Mx + N$ aus, setzt statt A und B die eben angegebenen Werthe, und bringt Alles auf gleiche Benennung, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{2(PQ + pq)}{Q^2 + q^2} \\ N &= \frac{2(Pq - Qp)a\sin\varphi}{Q^2 + q^2} - \frac{2(PQ + pq)a\cos\varphi}{Q^2 + q^2} \end{aligned}\right\} 289)$$

daher folgt der gesuchte Partialbruch $\frac{Mx + N}{x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2}$. Hat die Bruchfunktion mehrere gleiche Faktoren von der Form $a + bx + cx^2$, $x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2$, so setze man ihn $= y$, bestimme die eine Wurzel der Gleichung $y = 0$, und verfahre nach (241) so ergibt sich der dem Nenner y^m zugehörige Zähler $Ax + B$, woraus sich nach (243) die Größe A und B bestimmen läßt.

Beispiel. $\frac{ax^3 - bx + c}{x^4 - a^4} = \frac{ax^3 - bx + c}{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)}$ zu zerlegen? Hier ist wenn man den Faktor $x^2 + a^2$ mit dem quadratischen Faktor $x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2$ vergleicht, $\cos\varphi = 0$, also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, sonach ist bei der Be-

stimmung von P und Q anzunehmen $x^n = a^n \cos \frac{1}{2} n\pi$, und um p und q zu erhalten ist zu setzen $x^n = a^n \sin \frac{1}{2} n\pi$, mithin ist $P = a.a^3 \cos \frac{3}{2}\pi - b \cos \frac{1}{2}\pi + c = c$, und $p = a.a^3 \sin \frac{3}{2}\pi - b \sin \frac{1}{2}\pi + c = -a^4 - ab$: ferner ist $\varphi_1 x = 4x^3$, also
$Q = 4a^3 \cos \frac{3}{2}\pi = 0$, $q = 4^3 \sin \frac{3}{2}\pi = -4a^3$. Man hat daher wenn man diese Werthe in 289) setzt
$M = \frac{a^3 + b}{2a^2}$, $N = \frac{-c}{2a^2}$: die dem Nenner $x^2 - a^2$ zugehörigen Partialbrüche findet man wie vorhin; folglich ist

$$\frac{ax^3 - bx + c}{x^4 - a^4} = \frac{(a^3+b)x - c}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{a^4 - ab - c}{4a^3(x+a)} + \frac{a^4 - ab + c}{4a^3(x-a)}$$

IX. Elementar-Integrale.

245. Eine Funktion heißt in Beziehung auf ihr Differentiale das Integrale desselben, ein gegebenes Differentiale integriren heißt diejenige Funktion finden, durch deren Differenzirung das gegebene Differentiale entstanden ist. Eine Sammlung von Vorschriften zu diesem Behufe enthält die Integralrechnung.

Das Integrale eines vorgelegten Differentiales bezeichnet man durch Vorausſetzung des Zeichen $\int$: auf diese Art bedeutet $\int ax^3 dx$ diejenige Funktion, deren Differentiale $ax^3\,dx$ ist.

246. Da die beständigen Glieder einer Funktion im Differentiale derselben wegfallen, so können sie auch bei der Bestimmung des Integrales aus dem Differentiale allein nicht angegeben werden, man pflegt sie deßhalb mit dem Zeichen C oder const. anzudeuten. Zur Bestimmung der beständigen Glieder einer Funktion ist nun erforderlich, daß der Werth des Integrales für

einen bestimmten Werth a der veränderlichen Größe bekannt sei; wenn nämlich $\varphi x\,dx$ das gegebene Differentiale, und $\int \varphi x\,dx = fx$ ihr Integrale vorstellt, so hat man allgemein

$$\int \varphi x\,dx = fx + C$$

ist nun b der Betrag des Integrales für $x = a$, so hat man auch $b = fa + C$, also $C = b - fa$, und daher vollständig $\int \varphi x\,dx = fx - fa + b$: gewöhnlich aber 290)
weiß man, für welchen Werth der veränderlichen Größe das zu findende Integrale sich auf Null reduzirt, da dann $b = 0$, und

$$\int \varphi x\,dx = fx - fa \text{ wird.} \qquad 291)$$

Nimmt man ein Integrale zwischen bestimmten Grenzen, etwa von $x = a$ bis $x = b$, so bezeichnet man es nach Furie (Fourier) mit zwei Indizes, wovon der untere sich auf die erste Grenze, der obere auf die zweite Grenze bezieht; auf diese Weise bedeutet $\int_a^b x^2\,dx$, daß das Integrale von $x^2\,dx$, welches $\frac{1}{3}x^3$ ist, zwischen den Grenzen $x = a$, und $x = b$ genommen werden muß, dessen Werth also $\frac{1}{3}(a^3 - b^3)$ ist.

247. Den Formeln des ersten Kapitels gemäß hat man nun, wenn fx, φx, ψx ... beliebige Funktionen von x bedeuten

$$\int [fx + \varphi x + \psi x + \ldots]\,dx = \int fx\,dx + \int \varphi x\,dx + \int \psi x\,dx + \ldots \qquad 292)$$

oder das Integral der Summe mehrerer Differentiale, ist gleich der Summe der Integrale, die einzelnen Differentialen zugehören.

$$\int a\varphi x\,dx = a\int \varphi x\,dx \qquad 293)$$

das Integrale eines in eine beständige Größe multiplizirten Differentiales, ist gleich dem unveränderlichen Faktor mul-

tiplizirt in das Differentiale der veränderlichen Größe.

248. Wegen $d.\frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx$ ist

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad 294)$$

das Integrale einer Potenz der veränderlichen Größe multiplizirt in ihr Differentiale ist gleich der um die Einheit höheren Potenz derselben, getheilt durch ihren Exponenten.

Hiernach ist $\int z^2 dz = \frac{1}{4} z^4$

$$\int 5 y^{\frac{2}{3}} = 3 y^{\frac{5}{3}}$$

$$\int (Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots) dx$$
$$= \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \ldots$$

Auf diese Form kann man durch eine einfache Substitution jede ganze rationale, und manche irrationale Differentialformel zurückführen. Um z. B. $\int (a+bx)^m dx$ zu finden, setze man

$$a + bx = z, \text{ also } dx = \frac{dz}{b},$$

und diese Werthe substituirt geben

$\int (a+bx)^m dx = \int \frac{z^m dz}{b} = \frac{z^{m+1}}{b(m+1)}$, oder statt z seinen Werth $a+bx$ gesetzt, wird

$$\int (a+bx)^m dx = \frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)} \qquad 295)$$

setzt man hier m negativ, so folgt

$$\int (a+bx)^{-m} dx = -\frac{(a+bx)^{-m+1}}{b(m-1)} \text{ oder}$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^m} = -\frac{1}{b(m-1)(a+bx)^{m-1}} \quad 296)$$

Ist $m = \frac{1}{2}$, so erhält man hieraus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)}} = \frac{2\sqrt{(a+bx)}}{b}, \text{ um wenn man } -\frac{1}{x} \quad 297)$$

und c an die Stelle von x und a setzt, so ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(bx+cx^2)}} = -\frac{bx}{2\sqrt{(bx+cx^2)}} \quad 298)$$

249 Bezeichnet a den Werth von x, für welchen das Integral $\int x^m\,dx$ verschwindet, so hat man der Formel 291) gemäß

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$$

Insoferne nun diese Funktion von m abhängig ist, kann man sie durch Fm vorstellen, und da sie für $m = -1$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, so wird der Werth von $F(-1)$ nach (229) bestimmbar, man findet so

$F(-1) = \lambda x - \lambda a$, oder, da $F(-1) = \int x^{-1}.dx$, und man λa zur Konstante schlagen kann,

$$\int \frac{dx}{x} = \lambda x \quad 299)$$

das Integrale des Differentials einer veränderlichen Größe getheilt durch diese selbst, ist gleich dem natürlichen Logarithmus der veränderlichen Größe. Hiernach ist

$\int \frac{A\,dx}{a+bx} = A\int \frac{dx}{a+bx}$, und wenn man $a + bx = z$ setzt, wodurch $dx = \frac{dz}{b}$ wird, erhält man

$\int \frac{dx}{a+bx} = \int \frac{dz}{b} = \frac{1}{b}\lambda z$, also wenn man den Werth von z wieder herstellt, wird

$$\int \frac{A\,dx}{a+bx} = \frac{A}{b}\lambda(a+bx) \qquad 300)$$

und eben so folgt

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\lambda(a+bx^2) \qquad 301)$$

250. Ist der Exponent der Potenz eine veränderliche Größe, so hat man wegen $d\frac{a^x}{\lambda a} = a^x\,dx$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\lambda a} \text{ nämlich} \qquad 302)$$

das Integrale einer Exponentialgröße multiplizirt in das Differentiale des Exponenten ist gleich derselben Exponentialgröße dividirt durch den natürlichen Logarithmus ihrer Grundzahl.

Ist $a = e$ die Basis der natürlichen Logarithmen, so hat man $\lambda a = 1$, und daher, wenn man mx statt x setzt,

$$\int e^{mx}.dx = \frac{1}{m}e^{mx}. \qquad 303)$$

251. Man hat ferner nach den Formeln 251) und 269)

$$\int \sin x.\,dx = -\cos x = \sin v\,x \qquad 304)$$

$$\int \cos x.\,dx = \sin x = -\cos v\,x \qquad 305)$$

$$\int \sec^2 x.\,dx = tg\,x \qquad 306)$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 dx = -\cot x \qquad 307)$$

$$\int tg\,x.\sec x\,dx = \sec x \qquad 308)$$

$$\int \cot x.\operatorname{cosec} x.\,dx = -\operatorname{cosec} x \qquad 309)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.}\,tg\,x = -\text{arc.}\,\cot x \qquad 310)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{arc.}\,\sin x = -\text{arc.}\,\cos x \qquad 311)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \text{arc. sec } x = -\text{arc cosec } x \quad 312)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \text{arc. sinv } x = -\text{arc. cosv } x \quad 313)$$

$$\int \cot x.\, dx = \lambda \sin x \quad 314)$$

$$\int tg\, x.\, dx = -\lambda \cos x = \lambda \sec x \quad 315)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x.\, \cos x} = \int dx \sec x \operatorname{cosec} x = \lambda tg\, x = -\lambda \cot x \quad 316)$$

252. Aus diesen bekannten Integralen lassen sich auf eine einfache Weise viele andere ableiten. Es ist $dx \sin^m x.\cos x = \sin^m x\, d(\sin x)$ mithin nach 294)

$$\int dx \sin^m x \cos x = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}, \text{ ferner} \quad 317)$$

$$\int dx \cos^m x.\sin x = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}. \text{ Man hat} \quad 318)$$

$$dx \operatorname{cosec} x = \frac{dx}{\sin x} = \frac{dx \cos \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{d(tg\, \frac{1}{2}x)}{tg\, \frac{1}{2}x}$$

nach 299); daher

$\int dx \operatorname{cosec} x = \lambda tg\, \frac{1}{2}x$, eben so ist 319)

$dx\, tg^2 x = dx\,(\sec^2 x - 1) = d(tg\, x) - dx$, daher

$\int dx\, tg^2 x = tg\, x - x$ 320)

Setzt man in 101) die Werthe aus 145) und 147), so erhält man $dx \sec^2 x.\operatorname{cosec}^2 x = 4\, dx \operatorname{cosec}^2 2x$, und nach 307) $= -2d(\cot 2x)$, mithin

$\int dx \sec^2 x.\operatorname{cosec}^2 x = -2 \cot 2x$ 321)

Ferner ist $dx.\,sinv\, x = dx\,(1 - \cos x)$, also

$\int dx\, sinv\, x = x - \sin x$, und eben so 322)

$\int dx\, cosv\, x = x + \cos x$. Endlich hat man 323)

$$\frac{dx}{sinv\, x} = \frac{dx}{1-\cos x} = \frac{dx}{2\sin^2 \frac{1}{2}x} = \tfrac{1}{2} dx \operatorname{cosec}^2 \tfrac{1}{2}x = -d(\cot \tfrac{1}{2}x),$$

also

$$\int \frac{dx}{sinv\, x} = -\cot \tfrac{1}{2}x. \quad 324)$$

253. Zerlegt man die Bruchfunktion $\frac{1}{1-x^2}$ nach (239) in die Partialbrüche $\frac{1}{2(1+x)}$ und $\frac{1}{2(1-x)}$, so erhält man

$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$: die Formel 300) gibt nun $\int\frac{dx}{1+x}=\lambda(1+x)$, und $\int\frac{dx}{1-x}=-\lambda(1-x)$; daher ist

$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\lambda\frac{1+x}{1-x}$. Setzt man ferner 325)

$\sqrt{(1+x^2)}=z-x$ und erhebt beide Theile zum Quadrat, so folgt

$1+x^2=z^2-2zx+x^2$, also $2zx=z^2-1$, und

$x=\frac{z^2-1}{2z}$: dieß gibt weiter $dx=\frac{z^2+1}{2z^2}dz$, und

$\sqrt{(1+x^2)}=\frac{z^2+1}{2z}$, daher $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}=\frac{dz}{z}=\lambda z$,

und statt z dessen Werth $x+\sqrt{(1+x^2)}$ gesetzt, wird

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}=\lambda[x+\sqrt{(1+x^2)}]. \qquad 326)$$

Hiernach findet man, wenn man $tg\,x$ statt x, also wegen 150) $sec\,x$ statt $\sqrt{(1+x^2)}$, und $sec^2x\,dx$ statt dx setzt, $\int sec\,x\,dx=\lambda(tg\,x+sec\,x)$, oder mit Rücksicht auf 179)

$$\int sec\,x\,dx=\lambda tg\,(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x) \qquad 327)$$

X. Integration algebraischer Differentiale.

254. Setzt man in den Formeln 310) 311) u. s. f. $\frac{bx^2}{a}$ statt x^2, also $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt x, und $dx\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt dx,

so ergeben sich folgende Integrale, und zwar man erhält aus 310)

$$\int dx \sqrt{\frac{b}{a}} : (1+\frac{bx^2}{a}) = \sqrt{ab} \int \frac{dx}{a+bx^2} = \text{arc. } tg\, x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

daher ist,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{arc. } tg\, x\sqrt{\frac{b}{a}} \text{: eben so folgt aus 325), 328)}$$

$$\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \lambda \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}, \text{ ferner aus 326) 329)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \lambda [x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{(1+\frac{bx^2}{a})}], \text{ daher wenn man die beständige Größe im Nenner } \frac{1}{\sqrt{b}} \lambda \frac{1}{\sqrt{a}}$$

mit der Konstante vereinigt, wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \lambda [x\sqrt{b} + \sqrt{(a+bx^2)}], \quad 330)$$

und aus 311)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc. } sin\, x\sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ endlich aus 312), 331)}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(bx^2-a)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arc. } sec\, x\sqrt{\frac{b}{a}}. \quad 332)$$

Setzt man aber in 313) $\frac{x}{a}$ statt x, so wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = \text{arc. } sinv \frac{x}{a} = -\text{arc. } cosv \frac{x}{a} \quad 333)$$

255. Vertauscht man in 328) die Buchstaben a, b mit α, β, so ist $\int \frac{dx}{\alpha+\beta x^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \text{arc. } tg\, x\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$: setzt man hier $x+\gamma$ statt x, und nach vollzogener Entwickelung $\alpha+\beta\gamma^2 = a$, $2\beta\gamma = b$, und $\beta = c$, so erhält man $\gamma = \frac{b}{2c}$, ferner $4ac = 4\alpha\beta + 4\beta^2\gamma^2$, also

$4ac - b^2 = 4\alpha\beta$, und hieraus $\alpha = \frac{4ac - b^2}{4c} = \frac{k}{4c}$

zur Abkürzung, und $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{2}{\sqrt{k}}$: dagegen wird aus

$\frac{dx}{\alpha + \beta x^2}$ die Größe $\frac{dx}{a + bx + cx^2}$, und aus $x\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ der

Ausdruck $(x + \gamma)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{2cx + b}{\sqrt{k}}$; setzt man also, Kürze halber das Trinom $a + bx + cx^2 = T$, so erhält man $\int \frac{dx}{T} = \frac{2}{\sqrt{k}} \text{ arc. } tg \frac{2cx + b}{\sqrt{k}}$. Ist aber $b^2 > 4ac$, 334) so würde $\sqrt{k} = \sqrt{(4ac - b^2)}$ imaginär, alsdann gibt aber eine ähnliche Transformation, vorgenommen mit der Formel 329), wenn man hier $-\beta$ statt β setzt, wodurch $4\alpha\beta = b^2 - 4ac = k'$, also $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k'}{c}}\sqrt{-1}$ wird, und $x\sqrt{\beta}$ in $(x + \gamma)\sqrt{-\beta} = \frac{2cx + b}{2\sqrt{c}} \cdot \sqrt{-1}$ übergeht, die Formel

$\int \frac{dx}{T} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \lambda \frac{\sqrt{k'} + 2cx + b}{\sqrt{k'} - 2cx - b}$. Man pflegt diesem Ausdrucke eine unterschiedene Form zu geben, entweder zieht man das Glied rechter Hand von der Konstante $\frac{1}{\sqrt{k'}} \lambda(-1)$ ab, oder aber man multiplizirt den Bruch unter dem Zeichen λ mit dem Nenner, und vereiniget im Ergebnisse die Größe $\frac{2}{\sqrt{k'}} \lambda \frac{1}{2\sqrt{c}}$ mit der Konstante: hiedurch wird

$\int \frac{dx}{T} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \lambda \frac{2cx + b - \sqrt{k'}}{2cx + b + \sqrt{k'}}$, und auch 335)

$\int \frac{dx}{T} = \frac{2}{\sqrt{k'}} \lambda \frac{\sqrt{k'} + 2cx + b}{\sqrt{T}}$ 336)

Ist endlich $b^2 = 4ac$, so werden beide Ausdrücke unbestimmt, dann hat man aber

$a + bx + cx^2 = a + bx + \frac{b^2x^2}{4a} = \frac{(2a+bx)^2}{4a}$, also

$\int \frac{dx}{T} = 4a \int \frac{dx}{(2a+bx)^2}$, wofür die Formel 296)

$-\frac{4a}{b(2a+bx)}$ gibt, mithin ist in diesem Falle

$\int \frac{dx}{T} = -\frac{4a}{b(2a+bx)}$. Wäre c negativ, so müßte man weil $\sqrt{k}$ imaginär würde, das Integrale nach 335) oder 336) nehmen. Setzt man in 335) $a = o$, so erhält man

$\int \frac{dx}{bx+cx^2} = \frac{1}{b} \lambda \frac{x}{b+cx}$ wenn man $\frac{1}{b}\lambda c$ zur Kon- 337)
stante schlägt.

256. Verfährt man auf gleiche Weise mit den Formeln 330) und 331), so erhält man

$a + bx - cx^2 = T'$ setzend

$\int \frac{dx}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \lambda [2cx + b + 2\sqrt{c\,T}]$, und 338)

$\int \frac{dx}{\sqrt{T'}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ arc. $sin \frac{2cx-b}{\sqrt{(4ac+b^2)}}$, woraus für 339)
$a = o$ folgt

$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx+cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \lambda [2cx + b + 2\sqrt{cx(b+cx)}]$,

oder weil die Größe unter dem Zeichen λ das Quadrat von $\sqrt{cx} + \sqrt{(b+cx)}$ ist,

$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx+cx^2)}} = \frac{2}{\sqrt{c}} \lambda [\sqrt{cx} + \sqrt{(b+cx)}]$, und 340)

$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ arc. $sin \frac{2cx-b}{b}$ 341)

Schreibt man aber in den vorhergehenden Formeln 338) und 339) $-\frac{1}{x}$ statt x, also $\frac{dx}{x^2}$ statt dx, und vertauscht die Buchstaben a, b, c mit b, — c, a; so ergibt sich $\int\frac{dx}{x\sqrt{T}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lambda\frac{2\sqrt{aT}-2a-bx}{x}$, und für ein 342)
negatives a
$\int\frac{dx}{x\sqrt{T}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arc. }sin\,\frac{bx-2a}{x\sqrt{(4ac+b^2)}}$, woraus 343)
für $b=0$ nach Hinweglassung des konstanten Faktors $\frac{1}{\sqrt{a}}\lambda 2\sqrt{a}$ folgt
$\int\frac{dx}{x\sqrt{(a+cx^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lambda\frac{\sqrt{(a+cx^2)}-\sqrt{a}}{x}$, und 344)
$\int\frac{dx}{x\sqrt{(-a+cx^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arc. }cos\,\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{c}}$ 345)
Für $a=0$, werden die Formeln 342) und 343) unbestimmt, aber dann geht der Ausdruck $\int\frac{dx}{x\sqrt{T}}$ in die Formel 298) über.

257. Differenzirt man den Ausdruck $T=a+bx+cx^2$ so findet man $dT=(b+2cx)\,dx$, daher
$x\,dx=\frac{dT-b\,dx}{2c}$, dividirt man diese Formel einmahl mit T und ein zweites Mahl durch T^p, so erhält man
$\int\frac{x\,dx}{T}=\frac{dT-b\,dx}{2cT}$ und $\frac{x\,dx}{T^p}=\frac{dT-b\,dx}{2cT^p}$, woraus
durch die Integration folgt:
$\int\frac{x\,dx}{T}=\frac{1}{2c}\lambda T-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{T}$, und wegen 296) 346)
$\int\frac{x\,dx}{T^p}=-\frac{1}{2(p-1)\,cT^{p-1}}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{T^p}$; man kann 347)
aber

$\int \frac{dx}{T^p}$ immer auf $\int \frac{dx}{T}$ zurückführen, wie das in der Folge gezeigt werden soll; demnach erhält man

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{T} = \frac{M}{2c}\lambda T + \frac{2Nc-Mb}{2c}\int \frac{dx}{T}, \text{ und} \quad 348)$$

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{T^p} = -\frac{M}{2(p-1)cT^{p-1}} + \frac{2Nc-Mb}{2c}\int \frac{dx}{T^p} \quad 349)$$

welche Formeln in Anwendung kommen, so oft gebrochene Funktionen in Partialbrüche zerlegt werden können, deren Nenner die Form $a+bx+cx^2$, oder $(a+bx+cx^2)^p$ haben.

258. Jede gebrochene Funktion $\frac{fx}{\varphi x}$, deren Abmessung im Zähler größer ist, als im Nenner, läßt sich durch wirkliche Division in eine ganze und in eine gebrochene Funktion zerlegen, so daß in der letzteren die Abmessung des Zählers kleiner wird, als jene des Nenners. Zerlegt man nun diese nach Anleitung des VIII. Kap. in die Partialbrüche, so ergibt sich dann ihr Integrale nach den Formeln für

$$\int \frac{dx}{a+bx}, \int \frac{dx}{(a+bx)^p}, \int \frac{dx}{a+bx+cx^2}, \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^p}$$

Beispiele. a. $\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-1)^2}$ zu finden? Nach (242. a) ist

$$\frac{z^2\,dz}{(z^2-1)^2} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{dz}{(z-1)^2} + \frac{dz}{(z+1)^2} + \frac{dz}{z-1} - \frac{dz}{z+1}\right)$$

das Integrale der beiden ersten Brüche findet man nach 294) $-\frac{1}{z-1}$ und $-\frac{1}{z+1}$, deren Summe $-\frac{2z}{z^2-1}$ gibt: das Integrale der beiden anderen Brüche ist nach 299) $\lambda(z-1)$ und $-\lambda(z+1)$, welche vereinigt $-\lambda\frac{z+1}{z-1}$

geben; sonach hat man

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-1)^2} = -\tfrac{1}{4}\left(\frac{2z}{z^2-1} + \lambda\frac{z+1}{z-1}\right)$$

b. $\int \frac{(5x^3+8x-20)\,dx}{(x-4)^3(x-4x+8)}$ zu bestimmen? Man findet

$$\frac{(5x^3+8x-20)\,dx}{(x-4)^3(x^2-4x+8)}$$

$$= \frac{83}{2}\cdot\frac{dx}{(x-4)^3} + \frac{41}{4}\cdot\frac{dx}{(x-4)^2} - \frac{45}{16}\cdot\frac{dx}{x-4}$$

$$+ \frac{1}{16}\cdot\frac{(45x-84)\,dx}{x^2-4x+8}$$: nun ist nach

$$\int \frac{83}{2}\cdot\frac{dx}{(x-4)^3} = -\frac{83}{4(x-4)^2},\quad \int \frac{41}{4}\cdot\frac{dx}{(x-4)^2} = -\frac{41}{4(x-4)}$$

und

$$\int -\frac{45}{16}\cdot\frac{dx}{x-4} = -\frac{45}{16}\lambda(x-4)$$; ferner hat man (

348) und 334) wenn man

$M=45$, $N=-84$, $a=8$, $b=-4$, $c=$ [illegible]

$$\int \frac{1}{16}\cdot\frac{(45x-84)\,dx}{x^2-4x+8} = \frac{45}{32}\lambda(x^2-4x+8) + \frac{1}{16}$$ [illegible]

und diese Integrale zusammen genommen geben (Diff.)

den gesuchten Werth:

$$-\frac{41x-81}{4(x-4)^2} + \frac{45}{32}\lambda\frac{x^2-4x+8}{(x-4)^2} + \frac{1}{16}\,\text{arc.}\,tg\,\frac{x-2}{2}.$$

Eben so findet man:

c. $$\int \frac{b^3\,dx}{x^6-a^6} = \frac{b}{3a^5}\left[\lambda\frac{(x-a)\sqrt{(x^2-ax+a^2)}}{(x+a)\sqrt{(x^2+ax+a^2)}}\right.$$

$$\left. -\sqrt{3}\,(\text{arc.}\,tg\,\frac{2x-a}{a\sqrt{3}} + \text{arc.}\,tg\,\frac{2x+a}{a\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{b^3}{3a^5}\left[\lambda\frac{(x-a)\sqrt{(x^2-ax+a^2)}}{(x+a)\sqrt{(x^2+ax+a^2)}} - \sqrt{3}\,\text{arc.}\,tg\,\frac{2ax\sqrt{3}}{a^2-2x^2}\right]$$

d. $$\int \frac{x^3-6x^2+4x-1}{x^4-3x^3-3x^2+7x+6}\,dx = \lambda\frac{(x-2)(x+1)}{x-3} + \frac{1}{x+1}.$$

259. Wenn eine irrationale Differentialformel bloß irrationale Größen von einerlei Art enthält, so kann sie immer durch Einführung einer neuen veränderlichen Größe rational gemacht werden. Ist nämlich fx wie immer aus x und $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$, $(a+bx)^{\frac{p}{q}}$, $(a+bx)^{\frac{r}{s}}$ zusammengesetzt, so hat man nur $a+bx=z^{nqs}$ zu setzen, um dann differenzirend $bdx=nqsz^{nqs-1}dz$ zu haben, während $(a+bx)^{\frac{m}{n}}=z^{mqs}$, $(a+bx)^{\frac{p}{q}}=z^{pns}$, und $(a+bx)^{\frac{r}{s}}=z^{nqr}$ wird, so daß $\int fx\,dx$ in $\int \varphi z\,dz$ übergeht, wo φz bloß eine rationale Funktion von z ist.

Z. B. Sei $dy=\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}$, man setze $x=z^6$, so folgt $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$, $dx=6z^5\,dz$, also $dy=6\,\frac{1+z^3-z^4}{1+z^2}\cdot z^5dz$: bringt man hieraus die ganze Funktion durch die Division weg, so erhält man

$$dy=6\left(-z^7+z^6+z^5-z^4+z^2-1+\frac{1}{1+z^2}\right)dz,$$

dieß gibt

$$y=6\left(-\tfrac{1}{8}z^8+\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{6}z^6-\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{4}z^3-z+\text{arc. }tg\,z\right),$$

oder

$$y=-\tfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}$$
$$\text{arc. }tg\sqrt[6]{x}$$

260. Hat aber die vorgelegte Differentialformel bloß Irrationalgrößen von der Form $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$, so wird sie rational, wenn man setzt

$\sqrt{(a+bx+cx^2)} = z - x\sqrt{c}$, woraus 350)

$x = \frac{z^2-a}{b+2z\sqrt{c}}$, und $dx = \frac{2dz(a\sqrt{c}+bz+z^2\sqrt{c})}{(b+2z\sqrt{c})^2}$ folgt.

Oder man setze $\sqrt{(a+bx+cx^2)} = \sqrt{a}+xz$, hie- 351)
durch wird

$x = \frac{2z\sqrt{a}-b}{c-z^2}$, und $dx = \frac{2(c\sqrt{a}-bz+z^2\sqrt{a})dz}{(c-z^2)^2}$.

Oder aber nehme man,

$\sqrt{(a+bx+cx^2)} = z(x-\alpha)\sqrt{c}$ an, wenn $x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$ 352)
in die Faktoren $x-\alpha$, $x-\beta$ zerlegt worden ist, so daß man auch noch setzen kann $\sqrt{(a+bx+cx^2)} = z(x-\beta)\sqrt{c}$, dann ist $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = z(x-\alpha)$, also $x-\beta = z^2(x-\alpha)$, woraus $z = \sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$, $x = \frac{\beta-\alpha z^2}{1-z^2}$, und $dx = \frac{2(\beta-\alpha)z}{(1-z^2)^2}dz$ folgt.

261. Den Ausdruck $dy = x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ rational zu machen, setze man $a+bx^n = z^q$; und man erhält $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = z^p$, und $x^n = \frac{z^q-a}{b}$, also

$x = \left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{q}{nb}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot z^{q-1}dz$, mithin

$dy = \frac{q}{nb} z^{p+q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} dz.$ $\mu)$

Man kann aber auch zuvor $a+bx^n$ in $(ax^{-n}+b)x^n$, und somit $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ auf die Form $x^{m+np+n-1}dx(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}$ verwandeln, sodann $ax^{-n}+b = z^q$ setzen, und man erhält nun

$dy = -\frac{q}{an} z^{p+q-1}\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1} dz$, welcher Ausdruck

auch aus μ) folgt, wenn man statt m, n beziehungsweise $m+n\frac{p}{q}$, und $-n$ setzt, und a mit b vertauscht. Hieraus ist zu ersehen daß die vorgelegte Binomialformel rational mithin integrabel wird, so oft $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist. Auf diesem Wege integriren sich sogleich $x^2\,dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x^{10}\,dx\,(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$, weil bei jenem $\frac{3+1}{2}=2$, bei diesem $\frac{11}{3}-\frac{5}{3}=\frac{6}{3}=2$ ist.

XI. Die theilweise Integration.

262. Wenn bei einer irrationalen Binomialformel die Kennzeichen der Integrabilität (261) nicht vorkommen, so kann man nichts desto weniger ihr Integrale auf ein oder mehrere Integrale zurückführen, welche entweder einfacher, und daher leichter zu finden, oder wohl auch zusammengesetzter, aber vielleicht schon bekannt sein möchten. Man nennt dieses Verfahren die theilweise Integration.

Sind t, u zwei Funktionen von x, und man differenzirt ihr Produkt tu, so ergibt sich
$d(tu)=t\,du+u\,dt$, also $u\,dt=tu-t\,du$, und wenn man integrirt $\int u\,dt=tu-\int t\,du$ 353)
zerlegt man also eine Differentialformel $u\,dt$ in zwei Faktoren $u=\varphi x$, $dt=\psi_1 x\,dx$, daß sowohl $\int\psi_1 x\,dx$ als auch $\int\psi x.\,d\varphi x$ entweder unmittelbar, oder durch fernere Reduktion kann gefunden werden, so erhält man auch $\int u\,dt=\varphi x\int\psi_1 x\,dx-\int\psi x.\,d\varphi x$.

263. Um hiernach den Ausdruck $x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$ auf eine einfachere Gestalt zu bringen, setze man $a+bx^n=X$, und $x^m X^p=y$, so findet man

$dy = mx^{m-1} X^p\,dx + px^m X^{p-1}\,dX$, aber

$dX = nbx^{n-1}\,dx$, daher

$dy = mx^{m-1} X^p\,dx + bnp\,x^{m+n-1} X^{p-1}\,dx$ λ)

Ferner hat man $bx^n = X - a$, sonach

$dy = m\,x^{m-1} X^p\,dx + np\,x^{m-1} X^p\,dx - anp\,x^{m-1} X^{p-1}\,dx$

oder wenn man die beiden ersten Glieder vereinigt

$dy = (m + np)\,x^{m-1} X^p\,dx - anp\,x^{m-1} X^{p-1}\,dx$ μ)

Man hat aber auch $X^p = X^{p-1}.X = X^{p-1}(a + bx^n)$

setzt man diesen Werth statt X^p in die Gleichung λ); so wird

$dy = am\,x^{m-1} X^{p-1}\,dx + bm\,x^{m+n-1} X^{p-1}\,dx$

$+ bnp\,x^{m+n-1} X^{p-1}\,dx$, oder

$dy = am\,x^{m-1} X^{p-1}\,dx + b(m+np)\,x^{m+n-1} X^{p-1}dx$ ν)

264. Integrirt man die einzelnen Glieder der Gleichungen μ) und ν), setzt dann statt y dessen Werth $x^m X^p$ bringt die beiden darinn erscheinenden Integrale abwechselnd auf die linke Seite des Gleichheitszeichens: so erhält man aus μ)

$\int x^{m-1} X^p dx = [x^m X^p + anp \int x^{m-1} X^{p-1} dx] : [m+np]$ 354)

$\int x^{m-1} X^{p-1} dx = [-x^m X^p + (m+np) \int x^{m-1} X^p dx] : anp$

und aus ν)

$\int x^{m-1} X^{p-1} dx = [x^m X^p - b(m+np) \int x^{m+n-1} X^{p-1} dx] : am$,

$\int x^{m+n-1} X^{p-1} dx = [x^m X^p - am \int x^{m-1} X^{p-1} dx] : b(m+np)$

Setzt man in der zweiten und dritten dieser 4 Gleichungen $p+1$ statt p, und in der letzten Gleichung $m-n$ statt m, und $p+1$ statt p, so ergibt sich:

$\int x^{m-1} X^p\,dx$

$= [-x^m X^{p+1} + (m+np+n) \int x^{m-1} X^{p+1} dx] : an(p+1)$ 355)

$= [x^m X^{p+1} - b(m+np+n) \int x^{m+n-1} X^p\,dx] : am$ 356)

$= [x^{m-n} X^{p+1} - a(m-n) \int x^{m-n-1} X^p\,dx] : b(m+np)$ 357)

265. Ist p positiv, so kann man mittelst der Formel 354), nach und nach $p-1$, $p-2$, $p-3$, .., $p-x$ statt p setzend das gesuchte Integrale $\int x^{m-1} X^p\,dx$ auf das

einfachere $\int x^{m-1} X^{p-r}\,dx$ zurückführen: und eben so reduzirt sich mittelst der Formel 355) für ein negatives p, das Integrale $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{X^p}$ auf das einfachere $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{X^{p-r}}$.

Ist aber m positiv, und man setzt in der Formel 357) $m-n$, $m-2n$, $m-3n$, ... $m-rn$ statt m, so findet man das gesuchte Integrale $\int x^{m-1} X^p\,dx$ aus $\int x^{m-nr-1} X^p\,dx$; hingegen für ein negatives m ergibt sich eben so mittelst der Formel 356) der Ausdruck

$$\int \frac{X^p\,dx}{x^{m-1}} \text{ aus } \int \frac{X^p\,dx}{x^{m-n+1}}.$$

Führen diese Reduktionsformeln auf die Form $\frac{1}{0}$, so ist dieß allemahl ein Zeichen, daß die Integration in diesem Falle direkt zu suchen sei. Wenn z. B. in 354) oder 357) $m+np=0$ also $p=-\frac{m}{n}$ ausfällt, so hat man $x^m dx(a+bx^n)^p = x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}}$, bei welchem Ausdruck das Kennzeichen der Integrabilität (261) eintrifft.

266. Die Formel 354) gibt für $n=2$, $X=a+bx^2$, und wenn man $p=\frac{1}{2}$ und $m=r+1$ setzt, wird

$$\int x^r\,dx\sqrt{X} = \frac{x^{r+1}\sqrt{X}}{r+2} + \frac{a}{r+2}\int \frac{x^r\,dx}{\sqrt{X}} \qquad 358)$$

Insbesondere ist für $r=0$

$\int dx\sqrt{X} = \frac{1}{2}x\sqrt{X} + \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{X}}$; daher erhält man wegen 330) und 331) $\int dx\sqrt{(a+bx^2)} =$

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a+bx^2)} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\lambda(x\sqrt{b}+\sqrt{X}) \qquad 359)$$

$$\int dx\sqrt{(a-bx^2)} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a-bx^2)} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\,\text{arc.}\sin x\sqrt{\frac{b}{a}} \qquad 360)$$

Setzen wir in 355) $m=1$, $n=2$, und ändern wir das Zeichen von p, so wird

$$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^p}=\frac{1}{2a(p-1)(a+bx^2)^{p-1}}+\frac{2p-3}{2a(p-1)}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{p-1}} \quad 361)$$

ist nun hier p eine ganze positive Zahl, so führt diese Formel zuletzt auf $\int\frac{dx}{a+bx^2}$, welches aus 328) bekannt ist.

267. Bedeutet r eine ganze positive Zahl, so findet man durch 357) für $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, und $m=r+1$

$$\int\frac{x^r dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}=\frac{x^{r-1}\sqrt{(a+bx^2)}}{br}-\frac{a(r-1)}{br}\int\frac{x^{r-2}dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} \quad 362)$$

und das gesuchte Integral reduzirt sich auf die bekannten Integrale 330) und 297) je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt. Mit Benützung dieser Formeln erhält man:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{2b}\left[x\sqrt{X}-\frac{a}{\sqrt{b}}\lambda(x\sqrt{b}+\sqrt{X})\right] \quad 363)$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{3b}\left(x^2-\frac{2a}{b}\right)\sqrt{X} \quad 364)$$

ferner, wenn man $a-bx^2=X'$ setzt, hat man

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X'}}=\frac{1}{2b}\left[x\sqrt{X'}+\frac{a}{\sqrt{b}}\,arc.\,sin\,x\sqrt{\frac{b}{a}}\right] \quad 365)$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{X'}}=-\frac{1}{3b}\left(x^2+\frac{2a}{b}\right)\sqrt{X'} \quad 366)$$

268. Setzt man in 356) $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, und $m-1=-r$, so wird

$$\int\frac{dx}{x^r\sqrt{X}}=-\frac{\sqrt{X}}{a(r-1)x^{r-1}}-\frac{b(r-2)}{a(r-1)}\int\frac{dx}{x^{r-2}\sqrt{X}} \quad 367)$$

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel gelangt man endlich entweder auf $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$, oder auf

$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx^2)}}$, je nachdem r gerade oder ungerade ist: das letztere Integrale ist aus 344) bekannt.

Mit Benützung dieser Formeln ergibt sich:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx^2)}} = -\frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{ax} \qquad 368)$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(a+bx^2)}} = -\frac{1}{2x}\left[\frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{x^2} + \frac{b}{\sqrt{a}}\lambda\frac{\sqrt{(a+bx^2)}-\sqrt{a}}{x}\right] \qquad 369)$$

Mehrere Reduktionsformeln findet man Z. VI. 158.

269. Ein Ausdruck von der Form $x^m dx(ax^r+bx^n)^p$ läßt sich durch die Division mit x^{pr} auf die Form $x^{m+pr}dx(bx^{n-r})^p$ zurückführen, dessen Integrale durch eine der vier Reduktionsformeln leicht gefunden werden kann. Wendet man die Formel 354) auf den Ausdruck $x^q dx\sqrt{(2rx-x^2)} = x^{q-\frac{1}{2}}dx\sqrt{(2r-x)}$ an, und setzt $m-1=q-\frac{1}{2}$, $n=1$, $p=\frac{1}{2}$, $q=2r$, $b=-1$, so erhält man

$$\int x^q dx\sqrt{(2rx-x^2)} = \frac{x^{q+1}\sqrt{(2rx-x^2)}}{q+2} + \frac{r}{q+2}\int \frac{x^{q+1}dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} \qquad 370)$$

und eben so folgt aus 357) wenn $p=-\frac{1}{2}$ gesetzt wird

$$\int \frac{x^q dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = -\frac{x^{q-1}\sqrt{(2rx-x^2)}}{q} + \frac{q-1}{q}\int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} \qquad 371)$$

Für $q=1$ und 2 erhält man hieraus wegen 333)

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = -\sqrt{(2rx-x^2)} + r.\,\text{arc.}sinv\frac{x}{r} \qquad 372)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = -\tfrac{1}{2}(x+3r)\sqrt{(2rx-x^2)} + \tfrac{3}{2}r^2\,\text{arc.}sinv\frac{x}{r}. \qquad 373)$$

Setzt man aber den Werth des Integrals $\int \frac{x^{q+1}\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$ aus 371) in 370), so erhält man

$$\int x^q dx \sqrt{(2rx-x^2)} = \frac{(q+1)x-r}{(q+1)(q+2)} x^q \sqrt{(2rx-x^2)} + \frac{(2q+1)r^2}{(q+1)(q+2)} \int \frac{x^q\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} \quad 374)$$

Für $q=0$ und 1 gibt diese Formel wegen 333)

$$\int dx \sqrt{(2rx-x^2)} = \tfrac{1}{2}(x-r)\sqrt{(2rx-x^2)} + \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{arc.sinv}(x:r) \quad 375)$$

$$\int x\,dx \sqrt{(2rx-x^2)} = \tfrac{1}{3}(2x^2-rx-3r^2)\sqrt{(2rx-x^2)} + \tfrac{1}{2}r^3 \operatorname{arc.sinv}(x:r) \quad 376)$$

270. Aehnliche Reduktionsformeln findet man für das Integral $\int dx \sin^m x \cdot \cos^n x$, wenn man in den Formeln 354) bis 357) $\sin x$ statt x, also $dx \cos x$ statt dx, m statt $m-1$, ferner $a=1$, $b=-1$, $n=2$ und $p=\frac{1}{2}(n-1)$ setzt. Bezeichnet man nur noch Kürze halber $\sin x$ mit p, $\cos x$ mit q, so ist

$$\int dx\, p^m q^n =$$
$$= [p^{m+1} q^{n-1} + (n-1)\int dx\, p^m q^{n-2}] : [m+n] \quad 377)$$
$$= [-p^{m+1} q^{n+1} + (m+n+2)\int dx p^m q^{n+2}] : [n+1] \quad 378)$$
$$= [p^{m+1} q^{n+1} + (m+n+2)\int dx p^{m+2} q^n] : [m+1] \quad 379)$$
$$= [-p^{m-1} q^{n+1} + (m-1)\int dx\, p^{m-2} q^n] : [m+n] \quad 380)$$

z. B. $\int dx \sin^4 x \cos^2 x$ zu finden, gibt 380)

$\int dx\, p^4 q^2 = -\frac{1}{6} p^3 q^3 + \frac{1}{2}\int dx\, p^2 q^2$, hierauf

$\int dx\, p^2 q^2 = -\frac{1}{4} p q^3 + \frac{1}{4}\int dx\, q^2$, ferner die Formel 377) für $m=0$, $\int dx\, q^2 = \frac{1}{2} p q + \frac{1}{2}\int dx$, daher ist

$$\int dx \sin^4 x \cos^2 x = -\tfrac{1}{6}\sin x \cos^3 x\,(\tfrac{1}{3}\sin^2 x + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{16}(\sin x \cos x + x)$$

Zuweilen ist es vortheilhafter die Potenzen der Sinus und Kosinus einer Größe nach 206) und 203) in die Sinus und Kosinus ihrer Vielfachen zu verwandeln, und dann die Integration nach den Formeln

$\int dx \cos kx = \frac{1}{k} \sin kx$, und $\int dx \sin kx = -\frac{1}{k} \cos kx$, welche aus den Formeln 305) und 304) leicht abzuleiten sind, vorzunehmen. So findet man z. B.

$$\int \cos^5 dx = \int [\tfrac{1}{16} \cos 5x + \tfrac{5}{16} \sin 3x + \tfrac{5}{8} \cos x]\, dx$$
$$= \tfrac{1}{80} \sin 5x + \tfrac{5}{48} \cos 3x + \tfrac{5}{8} \sin x.$$

271. Eben so reduzirt sich der Ausdruck $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$, auf eine algebraische Form, wenn man $\cos x = z$, also $-\sin x\, dx = dz$ setzt. Man erhält

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = -\int \frac{dz}{(a+bz)^n \sqrt{(1-z^2)}}. \qquad 381)$$

Ferner erhält man durch dieselbe Substitution

$$\int \frac{a' + b' \sin x}{(a+b\cos x)^n} dx = -a' \int \frac{dz}{(a+bz)^n \sqrt{(1-z^2)}} - b' \int \frac{dz}{(a+bz)^n} \qquad 382)$$

Noch bequemer wird man $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ setzen, woraus $z = tg\, \frac{1}{2} x$ wird, und $\int \frac{dx}{a + b \cos x}$ in $2\int \frac{dz}{(a+b) \pm (a-b)z^2}$ übergeht, welches man nach 328) integriren kann. Ist überhaupt fx eine algebraische Funktion von a^x, e^x, $\sin px$, die aber nicht x selbst enthält, so führt die Substitution $a^x = z$, oder $e^x = z$, auf eine algebraische Funktion von z. Hiernach wird z. B.

$$\frac{a^x dx}{\sqrt{(1+a^{nx})}} = \frac{1}{\lambda a} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1+z^n)}}$$

272. Differenzirt man aber die Funktion ze^x, wo z eine beliebige Funktion bedeuten kann, und bezeichnet die erste Ableitung von z mit z_1, so erhält man $d.ze^x = e^x dx(z+z_1)$; es ist also das Integrale einer

Differentialformel, bei welcher der Faktor von $e^x dx$ aus zwei Summanden besteht, wovon der eine das Differentiale des andern ist, das Produkt aus der Exponentialgröße e^x in den einen Summanden z. B.

$$\int e^x dx (3x^2 + x^3 - 1) = (x^3 - 1) e^x.$$

273. Transformirt man die Formel 361) nach der in (255) gewiesenen Methode, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{T^p} = \frac{b + 2cx}{(p-1)kT^{p-1}} + \frac{2c(2p-3)}{(p-1)k} \int \frac{dx}{T^{p-1}} \qquad 383)$$

Eben so folgt aus 358)

$$\int dx \sqrt{T} = \frac{b + 2cx}{4c} \sqrt{T} + \frac{k}{8c} \int \frac{dx}{\sqrt{T}}, \text{ und hie-}$$

her das Integral aus 338) gesetzt, wird

$$\int dx \sqrt{T} = \frac{1}{4c} [(b + 2cx) \sqrt{T} + \frac{k}{2\sqrt{c}} \lambda (2cx + b + 2\sqrt{cT})] 384)$$

Ist c negativ, also $a + bx - cx^2 = T'$, so folgt aus 339) $\int dx \sqrt{T'} =$

$$= \tfrac{1}{4}c[(2cx + b)\sqrt{T'} - \frac{4ac + b^2}{2\sqrt{c}} \text{ arc. } sin \frac{2cx - b}{\sqrt{(4ac + b^2)}}] \qquad 385)$$

274. Differenzirt man das Produkt $x^{m-1}\sqrt{T}$, so ergibt sich

$$d.x^{m-1}\sqrt{T} = (m-1)x^{m-2} dx \sqrt{T} + \frac{x^{m-1}(b + 2cx) dx}{2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{(m-1)x^{m-2} T dx}{\sqrt{T}} + \frac{x^{m-1}(b + 2cx) dx}{2\sqrt{T}}, \text{ und statt}$$

T den Werth gesetzt,

$$= \frac{(m-1)ax^{m-2} dx}{\sqrt{T}} + \frac{(2m-1)bx^{m-1} dx}{2\sqrt{T}} + \frac{mcx^m dx}{\sqrt{T}}$$

woraus durch die Integration folgt:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{T}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{T}}{mc} - \frac{(2m-1)b}{2mc}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{T}} - \frac{(m-1)a}{mc}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{T}} \quad 386)$$

Setzt man hier $m-2=-n$, und sucht aus der entstehenden Gleichung den Werth $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{T}}$, so findet man

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{T}} = -\frac{\sqrt{T}}{(n-1)ax^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{2(n-1)a}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{T}} - \frac{(n-2)c}{(n-1)a}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{T}} \quad 387)$$

Differenzirt man aber das Produkt $x^{m-1}T^{\frac{3}{2}}$ so erhält man erstlich

$$d.x^{m-1}T^{\frac{3}{2}} = (m-1)x^{m-2}T\,dx\sqrt{T} + \tfrac{3}{2}x^{m-1}(b+2cx)dx\sqrt{T}$$

hebt man nun den gemeinschaftlichen Faktor $\sqrt{T}$ heraus, verrichtet dann die angedeutete Multiplikation, und vereinigt die in x^m und x^{m-1} beziehungsweise multiplizirten Glieder, so ergibt sich nach der Integration

$$\int x^m dx\sqrt{T} = [x^{m-1}T^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}(2m+1)b\int x^{m-1}dx\sqrt{T} - (m-1)a\int x^{m-2}dx\sqrt{T}] : (m+2)c \quad 388)$$

275. Manchmahl sind mehrere Reduktionen erforderlich, um ein Integral auf ein anderes einfacheres von derselben Form zu bringen. So gibt die Formel 353) $\int x^n\,dx\,sin\,x = -x^n\,cos\,x + n\int x^{n-1}\,dx\,cos\,x$, und $\int x^{n-1}\,dx\,cos\,x = x^{n-1}\,sin\,x - (n-1)\int x^{n-2}\,dx\,sin\,x$, folglich hat man

$$\int x^n dx\,sin\,x = -x^n\,cos\,x + nx^{n-1}\,sin\,x - n(n-1)\int x^{n-2}dx\,sin\,x \quad 389)$$

Eben so ergibt sich:

$$\int x^n dx\,cos\,x = x^n\,sin\,x + nx^{n-1}\,cos\,x - n(n-1)\int x^{n-2}dx\,cos\,x \quad 390)$$

$$\int \frac{dx\,sin\,x}{x^n} = -\frac{cos\,x}{mx^{n-2}} - \frac{sin\,x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{m}\int \frac{dx\,sin\,x}{x^{n-2}} \quad 391)$$

wo Kürze halber $(n-1)(n-2)=m$ gesetzt wurde.

$$\int \frac{dx \cos x}{x^n} = \frac{\sin x}{m x^{n-2}} - \frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{m} \int \frac{dx \cos x}{x^{n-2}} \quad 392)$$

Diese Formeln führen, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, auf die Integralien

$\int \frac{dx \sin x}{x}$, und $\int \frac{dx \cos x}{x}$, welche keiner weiteren Reduktion fähig sind. Die Ausdrücke 192) geben aber

$$\frac{\cos x . dx}{x} = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{2!} + \frac{x^3\,dx}{4!} - \frac{x^5\,dx}{6!} + \ldots$$

$$\frac{\sin x . dx}{x} = dx - \frac{x^2\,dx}{3!} + \frac{x^4\,dx}{5!} - \frac{x^6\,dx}{7!} + \ldots$$

und hieraus folgt durch die Integration

$$\int \frac{\cos x . dx}{x} = lx - \frac{\frac{1}{2}x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{4}x^4}{4!} - \frac{\frac{1}{6}x^6}{6!} + \ldots \quad 393)$$

$$\int \frac{\sin x . dx}{x} = x - \frac{\frac{1}{3}x^3}{3!} + \frac{\frac{1}{5}x^5}{5!} - \frac{\frac{1}{7}x^7}{7!} + \ldots \quad 394)$$

XII. Integration der Differentialgleichungen.

276. Jede Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen läßt sich so umformen, daß alle Glieder, in welchen die veränderlichen Größen vorkommen, auf der einen Seite stehen: hiedurch erhält die Gleichung die Form $u = f(x, y) = C$. Aus diesem Ausdrucke folgt nach 275) $df(x, y) = M dx + N dy$, wenn M, N, die partiellen Differentiale (219) der Funktion u vorstellen. Ist nun umgekehrt die Differentialgleichung $M dx + N dy = 0$ gegeben, und man findet auf irgend eine Art, daß $M dx + N dy = du$ ist, und also $\int (M dx + N dy) = u = f(x, y)$, so hat man $f(x, y) = C$, wo C eine Konstante bedeutet. Ist z. B. $(6xy + 2x) dx + (3x^2 + 1) dy = 0$, so folgt $3(2xy\,dx + x^2 dy) + 2x\,dx + dy = 0$, und hieraus wird

$3x^2y + x^3 + y = C$ wodurch die Abhängigkeit der Größen x und y von einander bestimmt ist: man hat nämlich $y = \frac{C - x^3}{3x^2 + 1}$, und C ergibt sich aus den Bedingungen der Aufgabe, welche auf die gegebene Differentialgleichung führt.

277. Die einfachste Form hat die Differentialgleichung $M\,dx + N\,dy = 0$ alsdann, wenn M bloß eine Funktion von x und N eine Funktion von y ist, oder umgekehrt, wenn M bloß y, N bloß x enthält. Im ersten Falle erhält man unmittelbar

$\int M\,dx + \int N\,dy = C$, wo die Integrale nach den in den vorhergehenden Kapiteln angegebenen Regeln gefunden werden. Im zweiten Falle dividire man die Gleichung mit MN, so erhält man

$\frac{dx}{N} + \frac{dy}{M} = 0$, woraus $\int \frac{dx}{N} + \int \frac{dy}{M} = C$ folgt. Man nennt eine solche Umwandlung der Funktion die Absonderung der veränderlichen Größen, und sie kann immer vorgenommen werden, so oft M und N sich in zwei Faktoren zerlegen lassen, von welchen der eine bloß x, der andere bloß y enthält, oder aber konstant ist: wenn nämlich $M = XY$, $N = X'Y'$ ist, erhält man sogleich $\int \frac{X\,dx}{X'} + \int \frac{Y'dy}{Y} = C$ z. B.

$(y^2 - 1)\,dx + \frac{dy}{x} = 0$, gibt

$x\,dx + \frac{dy}{y^2 - 1} = 0$, und $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = C$

278. Ein häufig vorkommender Fall der Absonderung der veränderlichen Größen findet Statt, wenn M, und N gleichartige Funktionen (103) bedeuten, deren Dimension $= n$ sein mag: setzt man $y = xz$, so er-

halten beide den gemeinschaftlichen Faktor x^n, und die Gleichung $M dx + N dy = o$ verwandelt sich dann nach der Division mit x^n in $fz\,dx + \varphi z\,dy = o$, oder weil $dy = x dz + z dx$ ist, so wird $fz\,dx + \varphi z\,(x dz + z dx) = o$, woraus sofort $\frac{dx}{x} + \frac{\varphi z\,dz}{fz + z\varphi z} = o$ folgt. Z. B. aus $x dy + [y - \sqrt{(x^2 + y^2)}]\,dx = o$, erhält man für $y = xz$, erstlich $x dy + [xz - x\sqrt{(1 + z^2)}]\,dx = o$ oder $x dz + z dx + [z - \sqrt{(1 + z^2)}]\,dx = o$, und daher

$$\frac{dz}{2z - \sqrt{(1+z^2)}} + \frac{dx}{x} = o$$ welches integrirt

$$lx = \int \frac{dz}{-2z + \sqrt{(1+z^2)}}$$ gibt, wo nur noch nachdem man das Integrale bestimmt hat, $\frac{y}{x}$ statt z zu setzen ist.

279. Bisweilen läßt sich durch Einführung einer neuen veränderlichen Größe, eine ungleichartige Differentialgleichung gleichartig machen, und so zur Integration nach (278) vorbereiten. Es sei

$(a + bx + cy)\,dx + (a' + b'x + c'y)\,dy = o$, man setze $x = m + z$, $y = n + t$, also $dx = dz$, und $dy = dt$, so verwandelt sich dieselbe Gleichung in

$(a + bm + bz + cn + ct)\,dz + (a' + b'm + b'z + c'n + c't)\,dt = o$

da m und n ganz beliebig sind, so setze man

$a + bm + cn = o$, und $a' + b'm + c'n = o$, woraus

$m = \frac{ac' - a'c}{b'c - bc'}$ und $n = \frac{a'b - ab'}{b'c - bc'}$ folgt: für diese Werthe erhält man nun

$(bz + ct)\,dz + (b'z + c't)\,dt = o$

welche Gleichung gleichartig ist. Diese Substitution ist nicht anwendbar, wenn $b'c - bc' = o$ ausfällt, alsdann wird aber

$b'x + c'y = \frac{bc'}{c}x + c'y = \frac{c'}{c}(bx + cy)$, folglich die gegebene Gleichung

$adx + a'dy + (bx + cy)[dx + \frac{c'}{c}dy] = o$, und man erhält nun für $bx + cy = z$, wodurch $dy = \frac{dz - bdz}{c}$ wird, nach gehöriger Reduktion

$$dx + \frac{(a'c + c'z)\,dz}{(ac - a'b)\,c + (c^2 - bc')\,z} = o.$$

280. Seien P, Q, R gegebene Funktionen von x, oder auch konstante Zahlen, man soll die Differentialgleichung $Pdy + Qydx + Ry^n dx = o$ integriren? Man setze $y = tz$, wo t und z noch unbekannte Funktionen von x vorstellen, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in $Pzdt + Ptdz + Qtzdx + Rt^n z^n dx = o$, wählt man die willkührliche Größe z so, daß die in z multiplizirten Glieder verschwinden, so erhält man die Gleichungen $Pzdt + Qtzdx = o$, und $Ptdz + Rt^n z^n dx = o$: aus jener folgt, $\frac{dt}{t} = -\frac{Q}{P}dx$, oder wenn man integrirt $\lambda t = -\int \frac{Q}{P}dx$, setzt man diesen Werth Kürze halber $= u$, so ist $\lambda t = u$, oder $t = e^u$: wird nun dieser Werth in die zweite Gleichung gesetzt, so erhält man $\frac{dz}{z^n} = -\frac{R}{P}e^{(n-1)u}dx$, welches integrirt

$$\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} = \int \frac{Re^{(n-1)u}dx}{P}$$ gibt. Kann nun dieser Ausdruck nach den obigen Formeln integrirt werden, und setzt man das Resultat $= Fx$, so hat man $\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} = Fx + C$, und hieraus folgt

$z=(n-1)(Fx+C)^{-(n-1)}$. Die Voraussetzung $y=tz$ gibt nun

$$y=\frac{e^u}{(n-1)(Fx+C)^{n-1}}$$ zum verlangten Integrale.

Sei z. B. $xdy+3y+2x-5x^2=0$ so ist $P=x$, $Q=3$, $n=0$, $R=2x-5x^2$, also

$u=-\int\frac{3dx}{x}=-3lx$, und

$$Fx=\int\frac{(2x-5x^2)e^{3lx}}{x}dx=\int\frac{(2x-5x^2)x^3}{x}dx=\frac{1}{3}x^4-x^5,$$

daher $y=x^{-3}(x^3-\frac{1}{3}x^4+C)$, oder $2yx^3=C+2x^2-x^4$.

281. Wenn eine Differentialgleichung $Mdx+Ndy=0$ vollständig ist, so muß ihr immer die Bedingungsgleichung 276) Genüge leisten. Ist aber dieselbe nicht vorhanden, so kann man zuweilen die Gleichung dadurch vollständig machen, daß man sie mit einem veränderlichen Faktor multiplizirt, welcher daher der integrirende Faktor von der Gleichung genannt wird.

Das Integrale einer vollständigen Differentialformel $Mdx+Ndy=0$ ist eine Funktion zweier veränderlichen Größen x und y, und kann nur dreierlei Glieder enthalten, nämlich: einen Ausdruck der von x unabhängig ist, und den wir Y nennen wollen, ferner einen Ausdruck $=X$, der von y unabhängig ist, und endlich einen Ausdruck Z, in welchem x und y mit einander verbunden vorkommen; sonach hat man $f(x,y)=X+Y+Z$: bezeichnet man nun das Integrale der Funktion Mdx in Beziehung auf x mit ${}^x\int Mdx$, und eben so das Integrale von Ndy in Beziehung auf y mit ${}^y\int Ndy$, so hat man $f(x,y)={}^x\int Mdx+Y$, weil M das Differentiale der Funktion bedeutet, wenn bloß x als veränderlich ange-

sehen wird, und Y den von y abhängigen Theil derselben vorstellt und eben so wird $f(x, y) = {}^{y}\int N dy + X$, folglich ist $X + Z = {}^{x}\int M dx$, und $Y + Z = {}^{y}\int N dy$. Integrirt man daher eine Formel zuerst in Beziehung auf x allein, und sondert den von y abhängigen Theil vom Ergebnisse ab, so ist dieser $= Z$, jener $= X$: integrirt man ferner dieselbe Formel bloß in Beziehung auf y, und scheidet hievon den von x abhängigen Theil ab, so ist der Rest $= Y$, und man erhält hiedurch den vollständigen Werth von $f(x, y) = X + Y + Z$. Z. B. Die Differentialgleichung $[(x+y)^{-1} + 2x - 16xy]\,dx + [(x+y)^{-1} + 3y^2 - 8x^2]\,dy = 0$ gibt $\int M dx = \int \frac{dx}{x+y} + \int 2x\,dx - \int 16xy\,dx = \lambda(x+y) + x^2 - 8x^2y$, also ist $X = x^2$, und $Z = \lambda(x+y) - 8x^2y$; ferner findet man ${}^{y}\int N dy = \lambda(x+y) + y^3 - 8x^2y$, woraus sich $Y = y^3$ ergibt, sonach hat man das gesuchte Integrale, oder $f(x, y) = x^2 + y^3 + \lambda(x+y) - 8x^2y = C$. Auf demselben Wege findet man das Integrale von $\frac{a(x\,dx + y\,dy)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} + 3by^2\,dy = a\sqrt{(x^2+y^2)} + \text{arc.}\,tg\frac{x}{y} + by^3 + C$. Ist $a = b = 0$, so wird $\int \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = \text{arc.}\,tg\frac{x}{y}$. Eben so ergibt sich $\int \frac{dx[x + \sqrt{(x^2+y^2)}] + y\,dy}{[x+\sqrt{(x^2+y^2)}]\sqrt{(x^2+y^2)}} = \lambda C[x + \sqrt{(x^2+y^2)}]$.

282. Sei nun $M dx + N dy = 0$ eine unvollständige Differentialgleichung und R eine unbekannte Funktion von

x und y von der Beschaffenheit, daß der Gleichung $MRdx + NRdy = 0$ die Bedingung

$\left(\frac{dMR}{dy}\right) = \left(\frac{dNR}{dx}\right)$ Genüge leistet: man hat dann

$\left(\frac{MdR}{dy}\right) + \left(\frac{RdM}{dy}\right) = \left(\frac{NdR}{dx}\right) + \left(\frac{RdN}{dx}\right)$, oder

$R\left(\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right) = \left(\frac{NdR}{dx}\right) - \left(\frac{MdR}{dy}\right)$. $\mu)$

Ist nun R bloß eine Funktion von x, so hat man

$R\left(\frac{MdR}{dy}\right) = 0$, folglich wird die Gleichung $\mu)$

$\frac{1}{N}\left(\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right)dx = \frac{dR}{R}$, woraus durch die Integration der integrirende Faktor folgt:

$$\lambda R = \int \frac{1}{N}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right]$$

Ist aber R bloß eine Funktion von x, so ist $\left(\frac{NdR}{dx}\right) = 0$ und man erhält aus $\mu)$

$\frac{1}{M}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] = \frac{dR}{R}$, also $\lambda R = \int \frac{1}{M}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right]$;

der integrirende Faktor läßt sich daher in allen Fällen bestimmen, wenn die Differenz der beiden Ausdrücke $\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$ durch M oder N getheilt eine Funktion gibt, die bloß eine veränderliche Größe erhält. Für die Gleichung $(6y - 4x^2)\,dx + 3x\,dy = 0$ findet man so $R = x$, wird nun dieselbe hiermit multiplizirt, so erhält man $(6xy - 4x^3)\,dx + 3x^2\,dy = 0$, wo die Bedingungsgleichung angetroffen wird: die Integration (281) gibt $3x^2y - x^4 = C$.

288. Enthält eine Differentialgleichung auch die zweiten Differentiale der Funktion selbst, als auch ihrer

veränderlichen Größe, so heißt sie eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Die einfachsten dieser Gattung sind folgende: Sei $\frac{d^2y}{dx^2} + X = 0$, und X eine Funktion von x allein, so ist ihr Integrale $\frac{dy}{dx} + \int X dx = C$, und wenn man noch einmahl integrirt $y + \int dx \int X dx = Cx + C'$, wo C, C' die willkührlichen Konstanten vorstellen, welche zur Vervollständigung des Ausdrucks bei jeder Integration beizufügen sind.

284. Sei $\frac{d^2y}{dx^2} + Y = 0$, und Y eine Funktion von y allein, so ist wenn man mit $2\,dy$ multiplizirt:

$2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx} + 2Y\,dy = 0$, oder

$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2Y\,dy = 0$, daher $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\int Y dy = C$, oder

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{[C - 2\int Y\,dy]}$, hieraus folgt

$dx = \frac{dy}{\sqrt{[C - 2\int Y\,dy]}}$, und $x = \int \frac{dy}{\sqrt{[C - 2\int Y dy]}} + C'$

Wäre z. B. $Y = ky$, und k eine unveränderliche Größe, so erhielte man $2\int Y\,dy = ky^2$, und

$dx = \frac{dy}{\sqrt{[C - ky^2]}}$, also nach 331)

$x = \frac{1}{\sqrt{k}}$ arc. $sin\, y\sqrt{\frac{k}{C}}$: durch Umkehrung dieser Formel folgt $y = \sqrt{\frac{C}{k}}\, sin\,(x\sqrt{k} - C'\sqrt{k})$, wo C, C' die zwei willkührlichen Konstanten sind. Man hat diese Differentialgleichung durch Multiplikation mit $\frac{dy}{dx}$ zur Integration vorbereitet: da nun aus dem für y ge-

fundene Werthe $dy = dx\sqrt{\frac{C}{k}}\ cos\ (x\sqrt{k} - C'\sqrt{k})$

folgt, so ist $\sqrt{\frac{C}{k}}\ cos\ (x\sqrt{k} - C'\sqrt{k})$, oder schlechtweg $cos\,x\sqrt{k} + sin\,x\sqrt{k}$ der integrirende Faktor dieser Gleichung. Multiplizirt man nämlich

$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ mit $cos\,x\sqrt{k}$, so erhält man

$\frac{d^2y}{dx}\ cos\ x\sqrt{k} + dx\,ky\ cos\ x\sqrt{k} = 0$. Um diesen Ausdruck zu integriren, setze man

$\frac{d^2y}{dx} = dt$, $cos\,x\sqrt{k} = u$ also

$t = \frac{dy}{dx}$, $du = -sin\,x\sqrt{k}.dx\sqrt{k}$, so gibt die Formel 353)

$$\int\frac{d^2y}{dx}\ cos\,x\sqrt{k} = \frac{dy}{dx}\ cos\,x\sqrt{k} + \sqrt{k}\int dy\ sin\,x\sqrt{k},$$

der zweite Theil dieses Ausdrucks findet sich weiter, wenn man $dy = dt$, $sin\,x\sqrt{k} = u$ setzt

$\int dy\ sin\ x\sqrt{k} = y\ sin\ x\sqrt{k} - \sqrt{k}\int y\ cos\,x\sqrt{k}.dx$,

durch deren Verbindung folgt:

$$\int\frac{d^2y}{dx}cos\sqrt{k} + k\int y\ cos\,x\sqrt{k}\,dx =$$

$$\frac{dy}{dx}cos\,x\sqrt{k} + y\sqrt{k}\,sin\,x\sqrt{k} = C \quad \mu)$$

Setzt man in dieser Gleichung $sin\,x\sqrt{k}$ statt $cos\,x\sqrt{k}$ und $-cos\,x\sqrt{k}$ statt $sin\,x\sqrt{k}$, so folgt sofort das Integrale des Produktes aus der vorgelegten Gleichung in

$$\sin\sqrt{k}\,\frac{dy}{dx}\,sin\,x\sqrt{k} - y\sqrt{k}\,cos\,x\sqrt{k} = C' \quad \nu)$$

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen $\mu)$ und $\nu)$ die Größe $\frac{dy}{dx}$, so erhält man

$y\sqrt{k} = C \sin x\sqrt{k} - C' \cos x\sqrt{k}$, welcher Ausdruck von dem vorhin gefundenen nur der Form nach verschieden ist.

285. Sei $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y + X = 0$. Man multiplizire diese Gleichung nach der Analogie des vorhergehenden Falles zuerst mit $dx \cos ax$, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx} \cos ax + a^2y\, dx \cos ax + X\, dx \cos ax = 0$$

und wenn man wie vorhin integrirt, wird

$$\frac{dy}{dx} \cos ax + ay \sin ax + \int X\, dx \cos ax = C \quad \varrho)$$

Eben so findet sich, wenn man die vorgelegte Gleichung mit $dx \sin ax$ multiplizirt, und dann integrirt

$$\frac{dy}{dx} \sin ax - ay \cos ax + \int X\, dx \sin ax = C' \quad \sigma)$$

welcher Ausdruck auch aus $\varrho)$ folgt, wenn man daselbst $\cos ax$ mit $\sin ax$, und $\sin ax$ mit $-\cos ax$ vertauscht. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen $\varrho)$ und $\sigma)$ die Größe $\frac{dy}{dx}$, so ergibt sich

$$ay = C \sin ax - C' \cos ax - \sin ax \int X dx \cos ax + \cos ax \int X dx \sin ax$$

$$\text{oder } y = \frac{C - \int X dx \cos ax}{a} \sin ax - \frac{C' - \int X dx \sin ax}{a} \cos ax \quad \tau)$$

Wäre hier $X = b - b \cos 2ax$, so erhielte man

$$\int X\, dx \cos ax = \frac{b \sin ax}{2a} - \frac{b \sin 3ax}{6a}, \text{ und}$$

$$\int X dx \sin ax = -\frac{3b \cos ax}{2a} + \frac{b \cos 3ax}{6a}, \text{ substituirt}$$

man diese Werthe in die Gleichung $\tau)$, so ergibt sich

$$y = \frac{1}{a} [C \sin ax - C' \cos ax] + \frac{b}{a^2} (1 + \tfrac{1}{6} \cos 2ax)$$

286. Die Gleichung $a\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{bdy}{dx}+cy+g=0$ zu integriren, setze man $y=z-\frac{g}{c}$, also $dy=dz$, und $d^2y=d^2z$, hiedurch wird die vorgelegte Gleichung $a\frac{d^2z}{dx^2}+b\frac{dz}{dx}+cz=0$; wird nun $z=e^{\int u dx}$ angenommen, wo u eine Funktion von x vorstellt, so erhält man $dz=e^{\int u dx}u dx$, und $d^2z=e^{\int u dx}u^2dx^2+e^{\int u dx}.du\,dx^2$ hiedurch verwandelt sich die Gleichung in $e^{\int u dx}[au^2+adu+bu+c]=0$, welcher Genüge geleistet wird, wenn man $du=0$, also $u=$ const. setzt, aber der Gleichung $au^2+bu+c=0$ entsprechend bestimmt; man findet $u=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2c}$, sind α, β diese beiden Wurzeln, so hat man $\int u dx=\alpha x+C$, und zugleich $\int u dx=\beta x+C'$, daher $z=e^{\alpha x+C}=e^{\alpha x}.e^{C}=Ae^{\alpha x}$, und auch $z=Be^{\beta x}$, wo A, B willkührliche Konstanten bedeuten. Vereinigt man diese zwei Werthe, so ergibt sich $y=-\frac{g}{c}+Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ als das Integrale der gegebenen Differentialgleichung. Vergl. B. VII. 159.

XIII. Summirung der Reihen.

287. Aus dem gegebenen summatorischen Gliede S_n einer Reihe kann man immer ihr allgemeines Glied ableiten, wenn man in jenem überall $n-1$ statt n setzt, und den so entstehenden Ausdruck S_{n-1} von S_n abzieht: weil die Summen der n und $n-1$ Anfangsglieder einer und derselben Reihe nur um ihr nte Glied unterschie-

den sein können. Hiernach kann man eine Menge Reihen bestimmen, deren Summen bekannt sind. Ist z. B.

$S_n = (n+1)(b + \frac{1}{6}cn + \frac{1}{3}cn^2)$, so wird

$S_{n-1} = n[b + \frac{1}{6}c(n-1) + \frac{1}{3}c(n-1)^2]$, und man findet das allgemeine Glied $a_n = S_n - S_{n-1} = b + cn^2$; die zugehörige Reihe ist aber

$$b,\ b+c,\ b+4c,\ b+9c,\ b+16c \ldots$$

Sei ferner $S_n = \frac{n}{b+cn}$, so ergibt sich

$$a_n = \frac{n}{b+cn} - \frac{n-1}{b+c(n-1)} = \frac{a}{[a+b(n-1)][a+bn]}$$

woraus sofort folgt, daß die Summe der mit a dividirten Glieder der zugehörigen Reihe, oder

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \ldots + \frac{1}{[a+b(n-1)][a+bn]} = \frac{n}{a(a+bn)} \quad 395)$$

sei. Ist hier $n = \infty$, so wird $S_n = \frac{1}{ab}$, demnach hat man für $a = b = 1$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots = 1 \text{ für } a=1, b=2 \quad 396)$$

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots = \tfrac{1}{2} \text{ u. s. f.} \quad 397)$$

288. Die umgekehrte Aufgabe, aus dem gegebenen allgemeinen Gliede einer Reihe, ihr summatorisches Glied zu finden, kann nur in einigen besonderen Fällen aufgelöset werden. Man bezeichne mit Sn^{r+1} und $S(n-1)^{r+1}$ die Summen von n und $n-1$ Gliedern einer Reihe, welche die $r+1$ten Potenzen natürlicher Zahlen enthält, nämlich

$1^{r+1}, 2^{r+1}, 3^{r+1} \ldots (n-1)^{r+1}, n^{r+1}$; so hat man

$S_n^{r+1} - S(n-1)^{r+1} = n^{r+1}$ $\mu)$

Nun ist $(n-1)^{r+1} = n^{r+1} - (r+1)n^r + \frac{1}{2}(r+1)rn^{r-1} + \ldots$,

daher kann $S(n-1)^{r+1}$ als die Summe mehrerer Reihen betrachtet werden, deren allgemeine Glieder nach einander sind: n^{r+1}, $(r+1)n^r$, $\frac{1}{2}(r+1)rn^{r-1}$, . . . dieß gibt

$S(n-1)^{r+1} = Sn^{r+1} - (r+1)Sn^r + \frac{1}{2}(r+1)rSn^{r-1} + \ldots$,

und wenn man diesen Werth in μ) substituirt, wird

$n^{r+1} = (r+1)Sn^r - \frac{1}{2}(r+1)rSn^{r-1} + \frac{1}{6}(r+1)r(r-1)Sn^{r-1} + \ldots$

Sucht man aus dieser Gleichung den Werth für Sn^r, so erhält man

$$Sn^r = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{1}{2}rSn^{r-1} - \frac{1}{6}r(r-1)Sn^{r-2} + \frac{1}{24}r(r-1)(r-2)Sn^{r-3} - \ldots \nu)$$

wird hier nach einander 0, 1, 2, 3 . . . statt r gesetzt, so ergibt sich

$Sn^0 = n$; $Sn = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}Sn^0 = \frac{1}{2}n(n+1)$;

$Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + Sn - \frac{1}{3}Sn^0 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$;

$Sn^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{3}{2}Sn^2 - Sn + \frac{1}{4}Sn^0 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$;

$Sn^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$;

$Sn^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$;

$Sn^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$;

$Sn^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$;

$Sn^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$;

$Sn^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$ u. s. f.

Z. B. Die Summe der fünften Potenzen aller Zahlen von 1 bis 100 findet man

$= \frac{1}{6}(100)^6 + \frac{1}{2}(100)^5 + \frac{5}{12}(100)^4 - \frac{1}{12}(100)^2 = 171708332500.$

289. Obschon sich diese Ausdrücke, so weit man will fortsetzen lassen, so ist doch das Gesetz, nach dem

sie gebildet werden nicht einfach genug, daß es in die Augen fallen könnte. Da in jedem dieser Ausdrücke, vom dritten Gliede angefangen, die Exponenten von n um zwei Einheiten abnehmen, so setze man

$$Sn^r = an^{r+1} + bn^r + A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-3} + A_3 n^{r-5} \ldots \varrho)$$

so erhält man dieser Annahme gemäß

$$S(n-1)^r = a(n-1)^{r+1} + b(n-1)^r + A_1(n-1)^{r-1} + A_2(n-1)^{r-3} + \ldots$$

daher gibt die Gleichung μ)

$$n^r = a[n^{r+1} - (n-1)^{r+1}] + b[n^r - (n-1^r] + A_1[n^{r-1} - (n-1)^{r-1}] + A_2[n^{r-3} - (n-1)^{r-3}] + \ldots$$

entwickelt man aber die darin vorkommenden Binomien, und behält diejenigen Potenzen von n, welche in dem Ausdrucke ϱ) erscheinen, so findet man

$$n^r = a[(r+1)n^r - \binom{r+1}{2}n^{r-1} - \binom{r+1}{4}n^{r-3} - \binom{r+1}{6}n^{r-5} - \ldots]$$

$$+ b[rn^{r-1} + \binom{r}{3}n^{r-3} + \binom{r}{5}n^{r-5} + \ldots]$$

$$- A_1[\binom{r-1}{2}n^{r-3} + \binom{r-1}{4}n^{r-5} + \ldots]$$

$$- A_2[\binom{r-3}{2}n^{r-5} + \binom{r-3}{4}n^{r-7} + \ldots]$$

$$- A_3[\binom{r-5}{2}n^{r-7} + \binom{r-5}{4}n^{r-9} + \ldots] \text{ u. s. f.}$$

ordnet man diesen Ausdruck nach n, und setzt nach (107) die Koeffizienten gleicher Potenzen von n gleich Null, so erhält man die Gleichungen:

$a(r+1) = 1$, $br - \frac{1}{2}a(r+1)r = 0$, woraus $a = \frac{1}{r+1}$, $b = \frac{1}{2}$

folgt, übereinstimmend mit der Gleichung ν): ferner wird

$$-a\binom{r+1}{4}+b\binom{r}{3}-A_1\binom{r-1}{2}=0$$

$$-a\binom{r+1}{6}+b\binom{r}{5}-A_1\binom{r-1}{4}-A_2\binom{r-3}{2}=0$$

$$-a\binom{r+1}{8}+b\binom{r}{7}-A_1\binom{r-1}{6}-A_2\binom{r-3}{4}$$
$$-A_3\binom{r-5}{2}=0 \text{ u. s. f.}$$

es ist leicht einzusehen, daß der Binomialkoeffizient im letzten Gliede der gemeinschaftliche Faktor aller vorhergehenden Glieder desselben Ausdruckes ist: hebt man ihn heraus, und berücksichtiget die Werthe von a und b; so findet man

$$A_1=\tfrac{1}{12}r,\ A_2=-\tfrac{1}{720}\binom{r}{3},\ A_3=\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{5}\tfrac{1}{2}\binom{r}{5},\ A_4=-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1}\tfrac{1}{0}\binom{r}{7}$$

$$A_5=\tfrac{1}{1}\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}\binom{r}{9},\ A_6=-\tfrac{6}{3}\tfrac{9}{2}\tfrac{1}{7}\tfrac{1}{6}\tfrac{1}{0}\binom{r}{11},\ \text{u. s. f.}$$

man nennt die in die ungeraden Binomialkoeffizienten und in die Glieder der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ multiplizirten Zahlen

$$\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{30}, \tfrac{1}{42}, -\tfrac{1}{30}, \tfrac{5}{66}, -\tfrac{691}{2730}, \tfrac{7}{6}, -\tfrac{3617}{510}, \tfrac{43867}{798}, \ldots$$

von ihrem Erfinder Bernulli, die Bernullischen Zahlen. Setzt man diese Werthe im Ausdrucke ϱ) so erhält man

$$Sn^r=\frac{n^{r+1}}{r+1}+\tfrac{1}{2}n^r+\tfrac{1}{1}\tfrac{1}{2}rn^{r-1}-\tfrac{1}{720}\binom{r}{3}n^{r-3}$$
$$+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{5}\tfrac{1}{2}\binom{r}{5}n^{r-5}-\ldots \qquad 398)$$

Vergl. Z. I. 502.

290. Ein anderes Verfahren, durch welches die Summe mehrerer Reihen gefunden werden kann, besteht darin, daß man von einer willkührlich angenommenen Reihe, durch schickliche Umstaltungen derselben, die unbekannte Summe wegzuschaffen sucht. Sei

$$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\ldots\frac{1}{a+nb}, \text{ also}$$

$$S-\frac{1}{a}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\ldots+\frac{1}{a+nb}; \text{ die Differenz}$$

beider Reihen gibt

$$\frac{1}{a}=\frac{b}{a(a+b)}+\frac{b}{(a+b)(a+2b)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{b}{[a+(n-1)b][a+nb]}+\frac{1}{a+nb}$$

hieraus folgt, wegen $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nb}=\frac{nb}{a(a+nb)}$

$$\frac{n}{a(a+nb)}=\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{[a+(n-1)b][a+nb]} \text{ wie oben (286)}$$

Verfährt man auf gleiche Weise mit der Reihe

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\ldots$$

so findet man

$$\frac{1}{2ab(a+b)}=\frac{1}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)}$$

$$+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)(a+4b)}+\ldots \quad 399)$$

Eben so folgt aus

$$S=1+\frac{a}{b}+\frac{a(a+h)}{b(b+h)}+\frac{a(a+h)(a+2h)}{b(b+h)(h+2h)}+\ldots$$

$$\frac{1}{b-a}=\frac{1}{b}+\frac{a}{b(b+h)}+\frac{a(a+h)}{b(b+h)(b+2h)}+\frac{a(a+h)(a+2h)}{b(b+h)..(b+3h)}$$

$$+\ldots \quad 400)$$

291. Aus jeder Reihe die nach den Potenzen von x fortlauft, und in welcher die Koeffizienten von x immer fort abnehmen, lassen sich unzählige summirbare Reihen ableiten. Sei

$$S = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \ldots$$

Multiplizirt man sie durch eine beliebige Funktion von x, etwa durch $x-1$, so wird

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \ldots = (x-1)S + 1,$$ welche Gleichung für $x = 1$ in

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1$$ übergeht, wie 396).

Multiplizirt man dieselbe Reihe mit $x^2 - 1$, so erhält man $\frac{x^2}{1.3} + \frac{x^3}{2.4} + \frac{x^4}{3.5} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}(x^2-1)S$

und dieser Ausdruck gibt für $x^2 - 1 = 0$, oder $x = 1$, und $x = -1$, die Reihen

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \ldots = \tfrac{3}{4} \qquad 401)$$

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{4.6} + \ldots = \tfrac{1}{4} \qquad 402)$$

Eben so kann man die angenommene Reihe mit $2x-1$, x^3-1, $(x-1)^2$, $(x-1)(2x-1)$ u. s. f. multipliziren, und die daraus entstehenden neuen Reihen suchen.

292. Wenn man die Summe einer Reihe, deren Glieder Funktionen von x sind kennt, so kann man aus derselben mittelst Differenzirens mehrere andere Reihen sammt ihren Summen ableiten. So ist z. B.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

multiplizirt man beiderseits mit x^m, differenziret dann, und läßt den gemeinschaftlichen Faktor x^{m-1} weg, so erhält man

$$\frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x + (m+2)x^2 + (m+3)x^3 + \ldots \qquad 403)$$

multiplizirt man diesen Ausdruck durch x^n, und differenzirt abermahls, so folgt

$$\frac{mn}{1-x}+\frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^2}=$$

$$=mn+(m+1)(n+1)x+(m+2)(n+2)x^2+\ldots \quad 404)$$

ein Verfahren, das sich mannichfältig abändern läßt.

293. Die Formel 81) gibt für $y=-x$

$$\lambda\frac{1}{1-x}=x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\ldots$$

multiplizirt man auf beiden Seiten durch dx, und integrirt, so ergibt sich nach der Formel 253)

$$\int dx\,\lambda\frac{1}{1-x}=x\lambda\frac{1}{1-x}-\int\frac{x\,dx}{1-x},\text{ nun ist}$$

$$\frac{x\,dx}{1-x}=-dx+\frac{dx}{1-x},\text{ also}\int\frac{x\,dx}{1-x}=-x-\lambda(1-x),$$

hienach hat man

$$\int dx\,\lambda\frac{1}{1-x}=x\lambda\frac{1}{1-x}+x+\lambda(1-x)=x+(1-x)\lambda(1-x),$$

und daher

$$\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{3.4}+\ldots=x+(1-x)\,\lambda\,(1-x) \quad 405)$$

Multiplizirt man auch diesen Ausdruck mit dx und integrirt, so folgt

$$\int[x\,dx+(1-x)\,dx\,\lambda(1-x)]$$
$$=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}(1-x)^2[\tfrac{1}{2}-\lambda(1-x)]+C$$

und da dieser Ausdruck für $x=0$ verschwindet, so ist $C=-\frac{1}{4}$, und daher

$$\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{3.4.5}+\ldots$$
$$=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}(1-x)^2[\tfrac{1}{2}-\lambda(1-x)]-\tfrac{1}{4} \quad 406)$$

294. Sei $y=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ also

$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + y$, dieß gibt

$\frac{dy}{1+y} = dx$, oder $x + C = \lambda(1+y)$: da aber y mit x verschwindet, so ist $C = o$, und daher $x = \lambda(1+y)$, oder $e^x = 1 + y$, mithin $y = e^x - 1$ übereinstimmend mit 80)

295. Die Summe y der unendlichen Reihe $x \sin m + \frac{1}{2}! x^2 \sin 2m + \frac{1}{3}! x^3 \sin 3m + \ldots$ zu bestimmen? Man erhält erstlich

$\frac{dy}{dx} = \sin m + x \sin 2m + \frac{1}{2} x^2 \sin 3m + \ldots$ und dann

$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin 2m + x \sin 3m + \frac{1}{2} x^2 \sin 4m + \ldots$ also

$$y + \frac{d^2y}{dx^2} = \sin 2m + x(\sin 3m + \sin m) + \frac{1}{2} x^2 (\sin 4m + \sin 2m) + \frac{1}{3}! x^3 (\sin 5m + \sin 3m) + \ldots$$
$$= 2 \sin m \cos m + 2x \sin 2m \cos m + x^2 \sin 3m \cos m + \frac{1}{3} x^3 \sin 4m \cos m + \ldots$$
$$= 2 \cos m \frac{dy}{dx}, \text{ daher ist}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \cos m \frac{dy}{dx} + y = o$, und mit der Differentialgleichung (286) verglichen, erhält man

$a = 1$, $b = -2 \cos m$, $c = 1$, $g = o$, ferner

$\alpha = \cos m + \sin m \sqrt{-1}$, $\beta = \cos m - \sin m \sqrt{-1}$.

Nun verschwindet y mit x, und $\frac{dy}{dx}$ gibt $\sin m$ für $x = o$, demnach hat man aus den Gleichungen $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$, und $\frac{dy}{dx} = \alpha Ae^{\alpha x} + \beta Be^{\beta x}$ zur Bestimmung der Konstanten die Gleichungen $o = A + B$, und

$sin m = \alpha A + \beta B = A(cos m + sin m\sqrt{-1}) + B(cos m - sin m\sqrt{-1})$

woraus sich $A = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$, $B = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ ergibt. Dieß gibt $y = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{2\sqrt{-1}} = e^{x cos m} \cdot \frac{e^{x sin m\sqrt{-1}} - e^{-x sin m\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

oder $y = e^{x \cos m} . sin(x sin m)$ 407)

Man lese nach Z. III. 27. und 312.

Ueber Differential- und Integral-Rechnung können unter vielen anderen empfohlen werden:

Vollständiger Lehrbegriff der höheren Analysis. Von Tobias Mayer. 2 Bände Göttingen 1818.

Lehrbegriff der Differentialrechnung. Von D. E. S. Unger. Erfurt und Gotha 1826.

Die Integralrechnung und ihre Anwendung. Von eben demselben. Erfurt und Gotha 1827.

L. Eulers vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lat. übers. von J. Salomon. 4 Bände. Wien 1828 — 1830.

Drittes Buch.

Die Kurven mit einfacher Krümmung.

I. Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene.

296. Denkt man sich durch irgend einen Punkt A (Fig. 2) zwei gerade Linien XX', YY' gezogen, welche einen beliebigen Winkel mit einander bilden, und führt man durch einen andern Punkt M die Linien MB, MC mit den vorhergehenden parallel, bis sie dieselben beziehungsweise in B und C schneiden; so ist die Lage des Punktes M in Beziehung auf die Geraden XX' und YY' völlig bestimmt, wenn man weiß, wie groß die Geraden MB und MC sind, und innerhalb welchen der vier Winkeln, welche die beiden Geraden XX', YY' mit einander einschließen, sich der fragliche Punkt befindet. Denn ist MB = a, und MC = b gegeben, und man frägt nach der Lage des Punktes M; so trage man MB = AC von A nach C und C' diesseits und jenseits der Geraden YY', und ziehe durch diese Punkte die parallelen Geraden MM', M''M''', hierauf trage man MC = AB von A nach B und B', und führe die Parallelen MM''', M'M'', so erhält man die vier Punkte M, M', M'', M''' welche den gegebenen Bedingungen Genüge leisten: weiß man nun noch innerhalb welchen der vier Winkeln der frag-

liche Punkt anzutreffen ist, so bleibt über die Lage desselben kein Zweifel mehr übrig. Die letzterwähnte Angabe wird am einfachsten durch die Zeichen + und — zu Stande gebracht, welche man den Geraden MB, MC vorsetzt: denn es verhalten sich die Geraden MB, M'''B, und MC, M'C wie entgegengesetzte Größen; wenn man daher die oberhalb XX' und die rechts von YY' gezogenen Geraden CM, BM als positiv betrachtet, so muß man die unterhalb XX' und links von YY' liegenden Geraden, wie M'C, M'''B als negativ annehmen.

297. Man nennt die beiden Geraden XX', YY' auf welche die Lage eines Punktes oder eines Systems von Punkten bezogen wird, die Koordinatenaxen, ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt A den Anfangspunkt oder Ursprung der Koordinaten, und den Winkel YAX, den sie einschließen, den Koordinatenwinkel. Die Geraden MB, MC welche die Lage eines Punktes M bestimmen, heißen dessen Koordinaten und werden beziehungsweise mit den Buchstaben x und y bezeichnet: daher nennt man auch die ihnen parallelen Koordinatenaxen die Axen der x, Axen der y: insbesondere heißt jene, die Abscissenlinie, oder Abscissenaxe, diese hingegen die Ordinatenaxe, so wie die Koordinaten selbst auch mit den Namen: Abscisse, Ordinate unterschieden werden. Ist der Koordinatenwinkel ein rechter, so nennt man die zugehörigen Koordinaten rechtwinklig: welche in der Folge immer anzunehmen sind, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird.

298. Diesen Bezeichnungen gemäß hat man, die Gerade XX' zur Abscissenlinie angenommen, und

$MB = a$, $MC = b$ gesetzt, für den Punkt

M	$x = +a$, $y = +b$
M′	$x = +a$, $y = -b$
M″	$x = -a$, $y = -b$
M‴	$x = -a$, $y = -b$

und man sieht, wie durch die gegebenen Koordinaten eines Punktes M, $x = a$, und $y = b$, nebst dem Vorzeichen derselben, die Lage des ersteren von allen andern Punkten in der Ebene hinreichend unterschieden wird.

Befindet sich ein Punkt in der Axe der x selbst, so ist seine der Axe der y parallele Koordinate $= o$, und seine Lage erhellet dann aus den Gleichungen $x = \pm a$, $y = o$, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem er rechts oder links der Geraden YY′ befindlich ist: liegt er hingegen auf der Axe der y, so ist seine der Axe der x parallele Koordinate $= o$, und man hat dann die Gleichungen $x = o$, $y = \pm b$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem er oberhalb oder unterhalb von XX′ liegt. Für den Anfangspunkt der Koordinaten selbst hat man die Gleichungen $x = o$, $y = o$.

299. Außer den rechtwinkligen Koordinaten sind noch Polarkoordinaten im Gebrauche, weil sie der Rechnung nicht selten eine einfachere Gestalt ertheilen. Bezieht man die Lage eines Punktes m auf eine fixe Gerade AX mittelst der veränderlichen Geraden $Am = r$, und des zwischen beiden eingeschlossenen Winkels $mAX = v$, so heißt AX die Axe, r der Radiusvektor und v der Neigungswinkel, und die beiden letzteren führen den Namen, Polarkoordinaten. Man sieht leicht, daß man beide Koordinaten als positive Größen betrachten kann, wenn man nur den Neigungswinkel aller Werthe von o bis 2π fähig sein läßt: so wären für

den Punkt m' die Polarkoordinaten $Am' = r$, und der erhabene Winkel $m'AX = v$.

II. Transformation der Koordinaten.

300. Die Lage eines Punktes M (Fig. 3) sei durch die Koordinaten $MB = y$, und $AB = x$, deren Koordinatenwinkel $XAY = \alpha$ ist, gegeben, man sucht desselben Lage in Beziehung auf die Koordinatenaxen $A'X'$, $A'Y'$ welche den Winkel $X'A'Y' = \beta$ einschließen? Die Abscissenlinie AX schneide die neue Abscissenaxe $A'X'$, wenn beide gehörig verlängert werden im Punkte C unter dem Winkel $X'CX = \gamma$; man ziehe MP parallel mit $A'Y'$, so sind $A'P$ und PM die zu bestimmenden Größen, ferner ziehe man durch A und B die Linien AD, BE zu $A'X'$, BD aber und AQ zu $A'Y'$ parallel; so ist
$BAD = EBA = \gamma$, $ABD = EBD - EBA = \beta - \gamma$,
$MBE = MBA - EBA = 180° - \alpha - \gamma$, endlich
$BME = 180° - MBE - MEB = \alpha + \gamma - \beta$, und die Dreiecke ADB, BEM geben folgende Proportionen:

$$\left.\begin{matrix}\sin ADB\\ \sin\beta\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}AB\\ x\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}\sin BAD\\ \sin\gamma\end{matrix}\right\} : BD$$

$$= \left.\begin{matrix}\sin ABD\\ \sin(\beta-\gamma)\end{matrix}\right\} : AD$$

$$\left.\begin{matrix}\sin BEM\\ \sin\beta\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}BM\\ y\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}\sin MBE\\ \sin(\alpha+\gamma)\end{matrix}\right\} : ME$$

$$= \left.\begin{matrix}\sin BME\\ \sin(\alpha+\gamma-\beta)\end{matrix}\right\} : BE$$

hieraus folgt

$$BD = \frac{x\sin\gamma}{\sin\beta},\quad ME = \frac{y\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\beta},$$

$$AD = \frac{x\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta},\quad BE = \frac{y\sin(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\beta}.$$

Bezeichnet man die auf die neuen Axen bezogenen Koordinaten des Punktes M mit x', y', und die Koordinaten des Anfangspunktes A mit a, b; so sind

$$\left.\begin{aligned} y' &= MP = ME + BD + AQ = \\ &b + \frac{y\,sin(\alpha+\gamma) + x\,sin\gamma}{sin\beta}, \text{ und} \\ x' &= AP = A'Q + AD - BE = \\ &a + \frac{x\,sin(\beta-\gamma) - y\,sin(\alpha+\gamma-\beta)}{sin\beta} \end{aligned}\right\} \quad 408)$$

die gesuchten Koordinaten.

Fällt die neue Axe der x' oberhalb AX, so erhält der Winkel γ einen entgegengesetzten Werth, wodurch zwar dessen Sinus nicht aber der Kosinus sein Vorzeichen ändert.

301. Sind beide Koordinatensysteme rechtwinklig, so hat man $\alpha = \beta = 90°$, also
$sin(\alpha+\gamma) = cos\,\gamma$, $sin(\beta-\gamma) = cos\,\gamma$, und die gefundenen Formeln geben dann

$y' = b + y\,cos\,\gamma + x\,sin\,\gamma$, $x' = a + x\,cos\,\gamma - y\,sin\,\gamma$, 409)

und im Falle die Axe der x' innerhalb des Koordinatenwinkels XAY fällt, wird

$y' = b + y\,cos\,\gamma - x\,sin\,\gamma$, $x' = a + x\,cos\,\gamma + y\,sin\,\gamma$.

Soll endlich bloß der Ursprung der rechtwinkligen Koordinaten geändert werden, und die neuen Axen den vorigen parallel laufen, so hat man $\gamma = 0$, mithin

$y' = b + y$, $x' = a + x$, und umgekehrt 410)
$y = y' - b$, $x = x' - a$.

302. Bezeichnet man die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes m (Fig. 2) mit x und y, und die Polarkoordinaten desselben mit r und v, so hat man offenbar

$$\left.\begin{array}{l} x = AD = Am.\cos mAD = r\cos v \\ y = mD = Am.\sin mAD = r\sin v \\ r = Am = \sqrt{(AD^2 + Dm^2)} = \sqrt{(x^2 + y^2)} \\ tg\, mAD = tg\, v = \dfrac{y}{x},\ \text{sonach } \sin v = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \\ \cos v = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}},\ \text{endlich } v = \text{arc. } tg\, \dfrac{y}{x}. \end{array}\right\} 411)$$

wodurch jeder Ausdruck zwischen rechtwinkligen Koordinaten x, y in einen gleichgeltenden sich auf Polarkoordinaten r, v beziehenden Ausdruck, und umgekehrt dieser in jenen verwandelt werden kann.

303. Eine Gleichung für irgend eine Linie heißt der Ausdruck, aus welchem die Lage eines jeden ihrer Punkte in Beziehung auf eine der Lage nach gegebene Linie, nämlich die Abscissenlinie oder Axe, hervorgeht. Insbesondere heißt die Gleichung, eine Koordinatengleichung, wenn sie für jeden beliebigen Werth der Abscisse die Größe der zugehörigen Ordinate angibt: hingegen eine Polargleichung wenn sie für einen beliebigen Neigungswinkel den zugehörigen Radiusvektor liefert.

304. Eine krumme Linie heißt eine Kurve mit einfacher Krümmung, wenn durch alle ihre Punkte eine Ebene gelegt werden kann: hingegen eine Kurve von doppelter Krümmung, wenn ihre Punkte in verschiedenen Ebenen gelegen sind.

Zusammenhängende krumme Linien sind solche, deren Lauf durch ein bestimmtes Gesetz geleitet ist, mithin durch eine Gleichung ihrer Koordinaten ausgedrückt werden kann. Unzusammenhängende krumme Linien nennt man solche, welche entweder nach keinem bestimmbaren Gesetze verzeichnet werden, oder aus mehreren krummen Linien, wovon eine jede

einem anderen Gesetze in ihrem Laufe unterworfen ist, bestehen.

305. Die zusammenhängenden krummen Linien unterscheidet man in algebraische, deren Lauf durch algebraische Funktionen ihrer Koordinaten angegeben werden kann, und in transcendente, deren Koordinatengleichung Logarithmen oder goniometrische Funktionen veränderlicher Größen enthält.

Die algebraischen krummen Linien unterscheidet man nach dem Grade der Gleichung, durch welche eine krumme Linie dargestellt wird, in Ordnungen: ist also die höchste Exponentensumme von x und y eines Gliedes der geordneten Koordinatengleichung gleich n, so heißt die zugehörige krumme Linie, eine Kurve der nten Ordnung. Diese Unterscheidung der algebraischen krummen Linien stützt sich auf der Eigenschaft, daß in allen Formeln, welche die Verwandlung der Koordinaten zum Gegenstande haben, bloß erste Potenzen der Koordinaten vorkommen, daher der Grad einer Koordinatengleichung ungeändert bleibt, man mag die zugehörige Kurve auf jedes denkbare Koordinatensystem bezogen haben.

III. Linien der ersten Ordnung.

306. Die allgemeinste Gleichung für Linien der ersten Ordnung ist $Ay + Bx + C = o$, woraus folgt $y = -\frac{Bx}{A} - \frac{C}{A}$, setzt man nun $-\frac{B}{A} = a, -\frac{C}{A} = b$, so erhält man die einfachere Gleichung $y = ax + b$.

Für $y = o$, folgt $x = -\frac{b}{a}$, versetzt man also den Anfangspunkt der Koordinaten um die Größe $\frac{b}{a}$ rück-

wärts, so erhält man die Gleichung in ihrer einfachsten Gestalt $y = a\left(x - \frac{b}{a}\right)$, nämlich $y = ax'$, wenn die neue Abscisse $x - \frac{b}{a}$ mit x' bezeichnet wird; sonach sind bei den Linien der ersten Ordnung die Ordinaten den Abscissen proportional, eine Eigenschaft die bekanntlich der geraden Linie zugehört, die daher allein die Linien der ersten Ordnung bildet. Um die Lage der geraden Linie, welche durch die Gleichung $y = ax + b$ vorgestellt wird, zu bestimmen, errichte man im Anfangspunkte der Koordinaten A (Fig. 4) eine Senkrechte $AB = b$, weil die Gleichung für $x = o$, $y = b$ gibt, mache ferner $AC = -\frac{b}{a}$; so sind B und C die der gesuchten Geraden zugehörigen Punkte, durch welche sofort die Lage derselben vollständig bestimmt ist.

307. Sei BM eine gerade Linie, deren Lage in Beziehung auf die Koordinatenaxen AX AY, die den Winkel $XAY = \alpha$ einschließen, durch eine Koordinatengleichung dargestellt werden soll. Verlängert man die Gerade bis sie der Abscissenlinie in C begegnet, und setzt den Winkel $MCX = \beta$, $AP = x$, $PM = y$, $CA = k$ so hat man im Dreiecke CMP

$$\left.\begin{matrix} sin\,CMP \\ sin(\alpha-\beta) \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} sin\,MCP \\ sin\,\beta \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} CP \\ x+k \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} PM \\ y \end{matrix}\right\}$$

$$\text{oder } y = \frac{(x+k)\,sin\,\beta}{sin\,(\alpha-\beta)}.$$

Bei rechtwinkligen Koordinaten wird $\alpha = 90°$, also

$$y = \frac{(x+k)\,sin\,\beta}{cos\,\beta} = (x+k)\,tg\,\beta$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen $y = ax + b$, so folgt $a = tg\,\beta$ und $b = k.\,tg\,\beta = AB$;

daher ist bei rechtwinkligen Koordinaten in der allgemeinen Gleichung $y = ax + b$, a gleich der Tangente des Winkels, den die gegebene Gerade mit der Abscissenlinie bildet, und b gleich der Normale im Anfangspunkt der Koordinaten.

308. Geht die Gerade durch den Anfangspunkt der Koordinaten, so ist $k = o$: also ihre Gleichung $y = \frac{x \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, und bei rechtwinkligen Koordinaten

$$y = x\,tg\,\beta = ax.$$

Die Gleichung $y = x$, gilt für eine Gerade, welche durch den Ursprung der Koordinaten geht, und die Abscissenlinie unter einem Winkel von 45° schneidet, weil $a = 1$, für β den Werth 45° gibt.

Die Gleichung $y = b$ gilt für eine Gerade, welche in der Entfernung b der Abscissenlinie parallel läuft, weil wenn in der Gleichung der Geraden $y = ax + b$, ax gleich Null ist, so muß $a = tg\,\beta = o$, also $\beta = o$ sein.

Da $tg\,30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist, so hätte eine Gerade, die im Ursprung der Koordinaten die Abscissenlinie unter einem Winkel von 30° durchschnitte die Gleichung

$$y = \tfrac{1}{3}x\sqrt{3}$$

309. Soll die Gleichung $y = ax + b$ einer Geraden angehören, welche durch zwei Punkte geht, deren Koordinaten x', y', und x'', y'' sind, so erhält man die Bedingungsgleichungen

$y' = ax' + b$, $y'' = ax'' + b$, daher

$y' - y'' = a(x' - x'')$, oder $a = \frac{y' - y''}{x' - x''}$, und diesen Werth statt a substituirt, erhält man

$b = y' - x'\frac{(y' - y'')}{x' - x''} = \frac{y''x' - y'x''}{x' - x''}$; daher ist die gesuchte Gleichung

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''}x + \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''} \quad 412)$$

zieht man beiderseits y' ab, so erhält diese Gleichung die einfachere Form

$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$, auf welche man un- 413)

mittelbar durch eine leichte Elimination gelangen kann, wenn man von den Gleichungen

$\alpha)\ y = ax + b$, $\beta)\ y' = ax' + b$, $\gamma)\ y'' = ax'' + b$, $\gamma)$ von $\beta)$, und $\beta)$ von $\alpha)$ abzieht, so erhält man

$\delta)\ y' - y'' = a(x' - x'')$, und $\varepsilon)\ y - y' = a(x - x')$ und den Werth von a aus $\delta)$ in $\varepsilon)$ substituirt.

Die Entfernung der beiden Punkte M, M' zu finden bemerke man, daß im rechtwinkligen Dreiecke MM'G

$MM' = \sqrt{(MG^2 + M'G^2)}$ also

$MM' = \sqrt{((x'' - x')^2 + (y'' - y')^2)}$ sei. 414)

310. Zwei Geraden, deren Gleichungen

$$y = ax + b,\ y = a'x + b'$$

sind, sollen sich in einem Punkte schneiden, man sucht dessen Koordinaten x', y'.

Da jede derselben durch den Durchschnittspunkt geht, so hat man sowohl $y' = ax' + b$, als auch

$y' = a'x' + b'$, daher

$ax' + b = a'x' + b'$ und hieraus

$x' = \frac{b - b'}{a' - a}$, und wenn man diesen Werth statt x' substituirt, erhält man

$$y' = \frac{a'b - ab'}{a' - a}. \quad 415)$$

Ist $b = b'$, so hat man $x' = o$, $y' = b$, daher der gesuchte Durchschnitt im Punkte B der Normale AB liegen wird; ist hingegen $a = a'$, so sind die Werthe für x', und y' unendlich groß, und es gibt keinen

Durchschnittspunkt derselben; da aber gleiche Tangenten auch gleichen Winkel zugehören, so müssen die Winkel die jede der beiden Geraden mit der Abscissenlinie bildet, einander gleich, mithin die Geraden zu einander parallel sein.

311. Sei V der Winkel, den beide Geraden in ihrem Durchschnittspunkte einschließen, und α, α' die Winkel, welche diese Linien mit der Abscissenlinie bilden, so ist offenbar $V = \alpha - \alpha'$ daher

$tg\,V = tg\,(\alpha - \alpha') = \frac{tg\,\alpha - tg\,\alpha'}{1 + tg\,\alpha . tg\,\alpha'}$: nun ist

$a = tg\,\alpha$, und $a' = tg\,\alpha'$ (307), sonach wird

$$tg\,V = \frac{a - a'}{1 + aa'}. \qquad 416)$$

Da $sin\,V = \frac{tg\,V}{\sqrt{(1+tg^2 V)}}$ ist, so erhält man hieraus

$$sin\,V = \frac{a - a'}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}, \text{ und} \qquad 417)$$

wegen $cos\,V = \frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\,V)}}$, wird endlich

$$cos\,V = \frac{1 + aa'}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}} \qquad 418)$$

Nennt man β, β' die Winkel beider Geraden mit der Axe der y, so hat man

$$cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}},\ cos\,\alpha' = \frac{1}{\sqrt{(1+a'^2)}}$$

$$cos\,\beta = sin\,\alpha = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}},\ cos\,\beta' = \frac{a'}{\sqrt{(1+a'^2)}},$$

daher gibt obiger Ausdruck für $cos\,V$ die Formel

$$cos\,V = cos\,\alpha . cos\,\alpha' + cos\,\beta . cos\,\beta' \qquad 419)$$

312. Beispiele a. Welchen Winkel schließen die Geraden, deren Gleichungen $y = \frac{1}{2}x\sqrt{3} - 5$, und $y = \frac{1}{3}x\sqrt{3} + 7$ sind? Man hat $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $a' = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,

also $a - a' = \frac{7}{18}\sqrt{3}$, und $1 + aa' = \frac{7}{6}$, daher $\frac{a - a'}{1 + aa'} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = tg\,30°$. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes ergeben sich nach (310),

$$x' = \tfrac{12}{7}\sqrt{3},\quad y' = \tfrac{13}{7}\sqrt{3}$$

b. Man sucht die Gleichung einer Geraden, die mit der gegebenen, deren Gleichung $y = (2 - \sqrt{3})x + 1$ ist, einen Winkel von 45° macht? Setzt man in der Gleichung $tg\,V = \frac{a - a'}{1 + aa'}$, $tg\,V = 1$, und $a = 2 - \sqrt{3}$, so ergibt sich nach einer leichten Rechnung $a' = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

313. Sind beide Linien parallel, so hat man $V = 0$, also $a = a'$ übereinstimmend mit (310). Sind sie aber zu einander senkrecht, so ist $C = 90°$ mithin $cos\,V = 0$, daher die Bedingungsgleichung $1 + aa' = 0$, woraus folgt $a' = -\frac{1}{a}$. Z. B. Die Linien, deren Gleichungen $y = 3x$, $y = -\frac{1}{3}x$ sind, durchschneiden sich im Anfangspunkte der Koordinaten unter einem rechten Winkel.

314. Führt man auf eine Linie, deren Gleichung $y = ax + b$, durch einen Punkt, dessen Koordinaten x', y' sind, eine Senkrechte, und bezeichnet mit x'', y'' die Koordinaten ihres Durchschnittes, und mit L die Länge dieser Senkrechten; so ist 414)

$$L = \sqrt{((x'' - x')^2 + (y'' - y')^2)}$$

Da nun die gegebene Gerade durch den Durchschnittspunkt geht, so ist ihre Gleichung $y'' = ax'' + b$, und da die Senkrechte ebenfalls denselben Punkt trifft, nach (309 und 313)

$$y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x');$$

man kann aber die Gleichung $y'' = ax'' + b$ auch so anschreiben

$y''-y'=a(x''-x')-y'+ax'+b$, mithin ist

$a(x''-x')-y'+ax'+b=-\frac{1}{a}(x''-x')$, daher

$(x''-x')(a+\frac{1}{a})=y'-ax'-b$, oder

$x''-x'=\frac{a(y'-ax'-b)}{1+a^2}=ak$ zur Abkürzung, also

$y''-y'=-\frac{1}{a}(x''-x')=-k$, mithin nach

414) $L=\sqrt{(a^2k^2+k^2)}=k\sqrt{(1+a^2)}$, oder

$$L=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{(1+a^2)}} \qquad 420)$$

beide vorhergehende Gleichungen geben endlich für die Koordinaten des Durchschnittes

$$x''=\frac{ay'+x'-ab}{1+a^2},\quad y''=\frac{a^2y'+ax'+b}{1+a^2} \qquad 421)$$

IV. Polygonometrie und Trigonometrie.

315. Zieht man in dem Polygon ABCDEF . . . (Fig. 5) die Geraden BC', CD', DE' u. s. f. mit einer beliebigen Linie AX parallel, und darauf die Senkrechten BB', CC', DD' u. s. f. und bezeichnet die auf einander folgenden Seiten des Polygons mit den Buchstaben a, b, c, d . . . hingegen die inneren Vieleckswinkel mit A, B, C, D . . . setzt man endlich die Hülfslinien

$AB'=x$, $BC'=x_1$, $CD'=x_2$,

$BB'=y$, $CC'=y_1$, $DD'=y_2$, u. s. f.

und die Winkel

$CBC'=\beta$, $DCD'=\gamma$, $EDE'=\delta$, . . . so hat man offenbar $x=a\cos A$, $y=a\sin A$

$x_1=b\cos\beta$, $y_1=b\sin\beta$

$x_2=c\cos\gamma$, $y_2=c\sin\gamma$ u. s. f.

es ist aber $B = CBC' + C'BB' + ABB'$, und wenn man den rechten Winkel mit R bezeichnet,

$$B = \beta + R + (R - A), \text{ und eben so}$$
$$C = \gamma + R + (R - \beta)$$
$$D = \delta + R + (R - \gamma) \text{ u. s. f.}$$

woraus folgt:

$$\beta = A + B - 2R$$
$$\gamma = \beta + C - 2R = A + B + C - 4R$$
$$\delta = A + B + C + D - 6R \text{ u. s. f. und weil}$$

nach (131)

$$\sin\beta = \sin(A + B - 2R) = -\sin(A + B)$$
$$\cos\beta = -\cos(A + B)$$
$$\sin\delta = -\sin(A + B + C + D)$$
$$\cos\delta = -\cos(A + B + C + D), \text{ so ist}$$

$x_1 = -b\cos(A + B)$, $y_1 = -b\sin(A + B)$
$x_3 = -d\cos(A + B + C + D)$, $y_3 = -d\sin(A..D)$
u. s. f.

Ist aber ein Polygon ein geschlossenes, so, daß der Endpunkt der letzten Seite zugleich dem Anfangspunkte der ersten Seite entspricht, so sind die Koordinaten desselben Punktes Null, und da diese beziehungsweise aus den Stücken $x, x_1, x_2, x_3 \ldots$ und $y, y_1, y_2, y_3 \ldots$ bestehen; so hat man

$x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = 0$ und

$y + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$, oder wenn man die vorhergehenden Werthe substituiret,

$$a\cos A - b\cos(A + B) + c\cos(A + B + C) - \ldots = 0 \quad 422)$$
$$a\sin A - b\sin(A + B) + c\sin(A + B + C) - \ldots = 0 \quad 423)$$

316. Bei einem Dreiecke hat man $A + B + C = 2R$, und beide Gleichungen gehen in folgende einfache über

$$a\cos A + b\cos C - c = 0$$
$$a\sin A - b\sin C = 0$$

woraus sich alle bekannten Formeln zur Auflösung der

Dreiecke ableiten lassen. Gewöhnlich bezeichnet man die Winkel eines Dreieckes mit A, B, C und die gegenüberstehenden Seiten nach der Ordnung mit a, b, c; dann tritt an die Stelle von a b c

die Größe c a b; daher geben obige Gleichungen

$$c\cos A + a\cos C - b = 0 \quad \alpha)$$
$$c\sin A - a\sin C = 0 \quad \beta)$$

die letztere Gleichung gibt unmittelbar

$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$, und auf analoge Weise ist auch 424)

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} \quad \gamma) \qquad \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} \quad \delta)$$

dividirt man aber $\beta)$ mit $\alpha)$, so entsteht

$$tg\,A = \frac{a\sin C}{b - a\cos C} \qquad 425)$$

Erhebt man nun $\alpha)$ und $\beta)$ zum Quadrat, und setzt in der letzteren Gleichung $1 - \cos^2$ statt $\sin^2$, dann aber den Werth von $c^2\cos^2 A$ aus der ersteren dieser beiden Gleichungen in die zweite, so folgt

$$c^2 = b^2 - 2ab\cos C + a^2. \qquad 426)$$

Endlich erhält man aus der Gleichung $\gamma)$

$\frac{\sin B + \sin C}{\sin C} = \frac{b+c}{c}$, $\frac{\sin B - \sin C}{\sin C} = \frac{b-c}{c}$,

und wenn man diese Ergebnisse mit der Gleichung $\delta)$ multiplizirt, so wird

$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{b+c}{a}$, $\frac{\sin B - \sin C}{\sin A} = \frac{b-c}{a}$, oder

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin A} = \frac{b+c}{a},$$
$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin A} = \frac{b-c}{a}$$

allein es ist $B + C = 2R - A$, also

$sin\frac{1}{2}(B+C) = cos\frac{1}{2}A$, $cos\frac{1}{2}(B+C) = sin\frac{1}{2}A$, hiedurch verwandeln sich die beiden Gleichungen, da $sin A = 2 sin\frac{1}{2}A cos\frac{1}{2}A$ ist, in

$$\frac{cos\frac{1}{2}(B-C)}{sin\frac{1}{2}A} = \frac{b+c}{a} \text{ und} \qquad 427)$$

$$\frac{sin\frac{1}{2}(B-C)}{cos\frac{1}{2}A} = \frac{b-c}{a} \qquad 428)$$

317. Mit Hülfe dieser Formeln wollen wir nun die unbekannten Stücke eines Dreiecks so zu bestimmen suchen, daß die Rechnung mittelst Logarithmen kann verrichtet werden, und hiebei die Ergebnisse möglichst genau ausfallen. Wenn von einer Seite oder einem Winkel, ohne Beisatz, die Rede ist, so soll darunter immer die gegenüberstehende Seite, und der gegenüberstehende Winkel verstanden werden.

Die Gleichung 424) gibt $a = \frac{sin A}{sin C} \cdot c$, und $sin A = \frac{a\, sin C}{c}$: mittelst welcher Formeln man aus zwei Winkeln und einer Seite, die andere Seite, und aus zwei Seiten und einem Winkel den anderen Winkel des Dreiecks bestimmen kann. Ist A nahe 90° gleich, so fällt die Bestimmung desselben aus der zweiten Formel ungenau aus, man setze dann $\frac{a\, sin C}{c} = tg\, x = cos\, 2y$, und bestimme die Winkel x, und y dieser Gleichung gemäß, oder aber weil nach 178)

$cos\, 2y = \frac{1 - tg^2 y}{1 + tg^2 y}$ ist, so fällt $tg\, y = \sqrt{\frac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x}}$, und wegen 170) $tg\, y = \sqrt{tg\,(45° - x)}$ aus, mithin hat man $sin A = cos\, 2y$, oder $A = 90° \pm 2y$.

318. Aus der Gleichung 425) erhält man
$tg\,A(b-a\cos C)=a\sin C$, oder wegen 144)
$b\sin A-a\sin A\cos C=a\sin C\cos A$; also
$b\sin A=a\sin(A+C)$, und hieraus folgt:
$a=\frac{b\sin A}{\sin(A+C)}$, $b=\frac{\sin(A+C)}{\sin A}$, $\sin(A+C)=\frac{b\sin A}{a}$,
die erstere dieser drei Formeln gibt eine Seite des Dreiecks aus zwei Winkeln und der Zwischenseite, die zweite Formel gibt aus zwei Winkeln und einer Seite die Zwischenseite, die dritte endlich, aus zwei Seiten und einem Winkel den Zwischenwinkel: man findet nämlich erst $A+C$, und wenn man davon den bekannten Winkel A abzieht, so tritt C hervor. Sollte $A+C$ nahe 90° gleich sein, so setze man der genaueren Berechnung halber $\frac{b\sin A}{a}=tg\,x$, und bestimme y aus der Gleichung $tg\,y=\sqrt{tg\,(45^\circ-x)}$, so folgt $A+C=90^\circ\pm 2y$.

319. Wenn aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel ein anderer Winkel zu berechnen ist, so setze man $\frac{a\cos C}{b}=\sin^2 x$, oder wenn $C>90^\circ$ ist, $\frac{a\cos C}{b}=tg^2\,x$
dann gibt die Formel 425)
$tg\,A=\frac{a\sin C}{b(1-\sin^2 x)}=\frac{a\sin C}{b\cos^2 x}$, und im zweiten Falle
$tg\,A=\frac{a\sin C}{b(1+tg^2\,x)}=\frac{a\sin C\cos^2 x}{b}$. Um noch aus den eben gegebenen Stücken die dritte Seite zu finden, setze man in 426) $1-2\sin^2\frac{1}{2}C$ statt $\cos C$, so erhält man
$c^2=b^2+a^2-2ab+4ab\sin^2\frac{1}{2}C$
$=(b-a)^2+4ab\sin^2\frac{1}{2}C$, und nehme $tg\,x=\frac{2\sin\frac{1}{2}C}{b-a}\sqrt{ab}$
an, so wird $c^2=\frac{(a-b)^2}{\cos^2 x}$, also $c=\frac{a-b}{\cos x}$.

Wenn aus zwei Seiten b, c und einem Winkel C die dritte Seite a zu berechnen ist, so suche man zuerst den andern Winkel B mittelst der Formel $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$, und dann nach (318) die dritte Seite $a = \frac{b \sin(B+C)}{\sin B}$.

320. Um aus drei Seiten einen Winkel zu berechnen, hat man mittelst der Gleichung 426)

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \text{ woraus man findet} \quad 429)$$

$$(1-\cos C)\,2ab = 2ab - a^2 - b^2 + c^2 = (c+a-b)(c-a+b)$$

setzt man nun $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$, so ergibt sich wegen 107) $\sin \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{ab}$ 430)

und eben so erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \frac{\sqrt{s\,(s-c)}}{ab}, \text{ also} \quad 431)$$

$$tg \tfrac{1}{2} C = \frac{\sqrt{(s-a)\,(s-b)}}{\sqrt{s\,(s-c)}}, \text{ endlich} \quad 432)$$

wegen 101) $\sin C = \frac{2\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{ab}$ 433)

Die Formeln 430) und 431) lassen sich mit Zuziehung der Gleichung 424) auch aus den Formeln 142) und 143) ableiten. Sind statt der drei Seiten ihre Logarithmen gegeben, so hat man aus 429) für

$$\frac{b}{a} = tg\,x, \cos C = \frac{a^2(1+tg^2 x) - c^2}{2ab} = \frac{a^2 - c^2\cos^2 x}{2ab\cos^2 x}$$

und hierin $\frac{c\cos x}{a} = tg\,y$ angenommen wird

$$\cos C = \frac{a^2(1-tg^2 y)}{2ab\cos^2 x} = \frac{a\cos 2y}{2ab\cos^2 x.\cos^2 y} \quad 434)$$

Sollte C sehr klein ausfallen, so nehme man $\cos C = tg\,z$, und $tg\,u = \sqrt{tg\,(45° - z)}$, hiedurch wird

$tg^2 u = \frac{1-tg z}{1+tg z}$, also $tg z = \frac{1-tg^2 u}{1+tg^2 u} = cos 2u$, daher $cos C = cos 2u$, und $C = 2u$.

321. Soll man aus zwei Winkeln und der Zwischenseite die beiden andern Seiten berechnen, so hat man wegen 427) und 428)

$$b+c = \frac{a\, cos\frac{1}{2}(B-C)}{sin\frac{1}{2}A}$$

$$b-c = \frac{a\, sin\frac{1}{2}(B-C)}{cos\frac{1}{2}A}, \text{ also}$$

$b = \frac{1}{2}[(b+c)+(b-c)]$, $c = \frac{1}{2}[(b+c)-(b-c)]$

Beide Gleichungen durcheinander dividirt geben

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{tg\frac{1}{2}(B-C)}{cot\frac{1}{2}A}, \text{ woraus}$$

$tg\frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c}\, cot\frac{1}{2}A$ folgt: man setze 435)

$\frac{c}{b} = cos x$, dann ist $tg\frac{1}{2}(B-C) = \frac{1-cos x}{1+cos x}\, cot\frac{1}{2}A$

und wegen 174) $tg\frac{1}{2}(B-C) = tg^2\frac{1}{2}x\, cot\frac{1}{2}A$ 436)

Ist aber c von b nur wenig verschieden, so wird $cos x$ ungenau, man setze dann $tg x = \frac{b}{c}$, und man erhält

$\frac{b-c}{b+c} = \frac{tg x - 1}{tg x + 1} = tg(x-45°)$ nach 170), also

$$tg\tfrac{1}{2}(B-C) = tg(x-45°)\, cot\tfrac{1}{2}A \qquad 437)$$

Mittelst dieser Formeln findet man daher aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel den Unterschied der beiden anderen Winkel, und hieraus ergibt sich

$B = \frac{1}{2}[(B+C)+(B-C)]$, $C = \frac{1}{2}[(B+C)-(B-C)]$,

endlich die dritte Seite a aus 427) oder 428).

Unabhängig von den Winkeln B und C findet man die dritte Seite a, wenn man $\frac{b}{c} = tg x$ und in 436)

$tg\frac{1}{2}(B-C)=tg\,y$ setzt, man erhält so

$$\frac{b+c}{c}=1+tg\,x=\frac{cos\,x+sin\,x}{cos\,x}=\frac{cos\,(45°-x)\sqrt{2}}{cos\,x}$$

und hiedurch gibt die Formel 427)

$$a=\frac{c.\,cos\,(45°-x)\,sin\,\frac{1}{2}A.\sqrt{2}}{cos\,x\,cos\,y},\text{ oder auch}\qquad 438)$$

$$a=\frac{c\,sin\,(45°-x)\,cos\,\frac{1}{2}A\sqrt{2}}{cos\,x\,sin\,y}.$$

322. Bei einem Vierecke ist $A+B+C+D=4R$ also beide Gleichungen 422) 423)

$$a\,cos\,A-b\,cos\,(A+B)+c\,cos\,(A+B+C)-d=o\qquad 439)$$

$$a\,sin\,A-b\,sin\,(A+B)+c\,sin\,(A+B+C)=o\qquad 440)$$

in welchen die ganze Theorie der Vierecke enthalten ist.

Für ein in einen Kreis eingeschriebenes Viereck ist die Summe der gegenüberstehenden Winkel $=2R$, also $A+C=B+D=2R$; daher

$$a\,cos\,A-b\,cos\,(A+B)-c\,cos\,B-d=o\qquad \alpha)$$

$$a\,sin\,A-b\,sin\,(A+B)-c\,sin\,B=o\qquad \beta)$$

Multiplizirt man $\alpha)$ durch $sin\,(A+B)$, und $\beta)$ durch $-cos\,(A+B)$, so gibt die Summe beider Produkte

$$a\,sin\,B-c\,sin\,A-d\,sin\,(A+B)=o\qquad \gamma)$$

Multiplizirt man aber $\alpha)$ durch $cos\,(A+B)$ und $\beta)$ durch $sin\,(A+B)$, so ist ihre Summe

$$a\,cos\,B-b-c\,cos\,A-d\,cos\,(A+B)=o\qquad \delta)$$

Substituirt man die Werthe von

$$sin\,(A+B)\text{ und }cos\,(A+B)$$

aus γ und δ) in α) und β), so erhält man

$$(ad+bc)\,cos\,A-(ab+cd)\,cos\,B+b^2-d^2=o\qquad \varepsilon)$$

$$(ad+bc)\,sin\,A-(ab+cd)\,sin\,B=o\qquad \eta)$$

Sei zur Abkürzung $ab+cd=g$, und $ad+bc=h$, so gibt die Gleichung η)

$$h\,sin\,A=g\,sin\,B\text{ oder}$$

$h^2(1-\cos^2 A) = g^2(1-\cos^2 B)$, mithin

$h^2\cos^2 A = h^2 - g^2(1-\cos^2 B)$, und diesen Werth in der Gleichung ε) substituirt, wird

$$h^2-g^2(1-\cos^2 B)=g^2\cos^2 B+2g\cos B(d^2-b^2)+(d^2-b^2)^2$$

oder $\cos B = \dfrac{h^2-g^2-(d^2-b^2)^2}{2g(d^2-b^2)}$, nun ist

$$h^2-g^2=a^2d^2+b^2c^2+2abcd-a^2b^2-c^2d^2-2abcd$$
$$=(a^2-c^2)d^2-(a^2-c^2)b^2=(a^2-c^2)(d^2-b^2)$$

sonach hat man

$$\cos B = \frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)} \quad \zeta)$$

es ist aber $tg\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{1-\cos B}{1+\cos B}}$, und wenn man zur Abkürzung wieder

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c+d) = s$$

setzt, wird $tg\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$, und eben so 441) erhält man die Tangenten von

$$\tfrac{1}{2}C,\ \tfrac{1}{2}D,\ \tfrac{1}{2}A$$

indem man die Buchstaben a, b, c, d mit den darauf folgenden vertauscht. Endlich ist die Fläche eines Viereckes

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin B + \tfrac{1}{2}cd\sin D$$

oder da $B+D=2R$ sind

$$F = \tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin B = \frac{(ab+cd)\,tg\,\frac{1}{2}B}{1+tg^2\,\frac{1}{2}B}$$
$$= \frac{(ab+cd)\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{(s-a)(s-b)+(s-c)(s-d)}$$

man hat aber

$$(s-a)(s-b)+(s-c)(s-d) = s^2-s(a+b)+ab+s^2-s(c+d)+cd$$
$$= 2s^2-s(a+b+c+d)+ab+cd$$
$$= ab+cd$$

daher wird $F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 442)

In einem Dreiecke ist $d = o$, also

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad 443)$$

welchen Ausdruck man auch erhält, wenn man in der Formel $F = \frac{1}{2} ab \sin C$, den Werth von $\sin C$ aus 433) substituirt.

IV. Linien der zweiten Ordnung.

323. Die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung zwischen den veränderlichen Größen x, y, welche uns die rechtwinkligen Koordinaten einer krummen Linie vorstellen, ist

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o \quad 444)$$

wo A immer positiv ist, hingegen B, C, D, E, F beliebige Werthe haben. Um die krummen Linien zu bestimmen, welche in dieser Gleichung enthalten sind, löse man sie in Beziehung auf y auf, man erhält zuerst

$$y^2 + \frac{Bx+D}{A} y + \frac{Cx^2 + Ex + F}{A} = o \quad 445)$$

und hieraus

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF]} \quad 446)$$

Das doppelte Zeichen der Wurzelgröße zeigt uns sogleich, daß im Allgemeinen zu jeder Abscisse zwei Ordinaten gehören, sobald die Wurzelgröße reell ist, daß sonach die Linien dieser Ordnung von einer zur Ordinatenare parallelen Linie in zwei Punkten geschnitten werden. Man kann der Größe x einen so großen Werth beilegen, daß für diesen und jeden größeren, der Werth des ersten Gliedes unter dem Wurzelzeichen oder die Größe

$$(B^2 - 4AC)x^2$$

die Summe der beiden anderen übersteigt, dann richtet sich das Zeichen der Größe unter dem Wurzelzeichen nach dem Zeichen des Koeffizienten von x^2: ist also $B^2 - 4AC$ negativ, so gibt es eine Grenze der positiven und negativen x, über welche hinaus die Werthe von y immer unmöglich sind, und da dieses auch in Beziehung auf x gilt, so hat man in diesem Falle eine auf einen endlichen Raum beschränkte Kurve, welche die Ellipse heißt.

324. Ist aber $B^2 - 4AC$ positiv, so werden die positiven und negativen Werthe von x eine Grenze haben, über welche hinaus die Werthe von y immer möglich sind: ein Gleiches gilt für die Größe x, wenn man x mit y vertauscht: die krumme Linie hat daher in diesem Falle vier einander gegenüberstehende ohne Ende fortlaufende Aeste und heißt eine Hyperbel.

Ist endlich $B^2 - 4AC$ null, so wird für noch so große positive x der Werth von y immer möglich sein, wenn $BD - 2AE$ positiv ist, während für negative x die Werthe von y unmöglich werden: das Gegentheil findet Statt, wenn $BD - 2AE$ eine negative Größe ist; die Kurve erstreckt sich in diesem Falle nur nach einer Richtung ohne Ende fort, und heißt Parabel.

Die Ellipse, wovon der Kreis nur ein besonderer Fall ist, die Hyperbel und Parabel sind sonach die einzigen krummen Linien der zweiten Ordnung; man nennt sie auch Kegelschnitte, weil sie, wie man in der Folge sehen wird, beim Durchschnitte eines Kegels mit einer Ebene zum Vorschein kommen.

325. Wenn man in der Gleichung 444) den Anfangspunkt der Koordinaten in den Punkt versetzt, dessen Koordinaten g, h sind, und die neuen Axen den vorigen parallel sein läßt, so erhellen die neuen Koordinaten x', y' aus den Gleichungen

$$x = x' + g \qquad y = y' + h$$

und durch die Substitution dieser Ausdrücke wird dieselbe Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A y'^2 + B x'y' + C x'^2 \\ + (2Ah + Bg + D) y' + (Bh + 2Cg + E) x' \\ + Ah^2 + Bgh + Cg^2 + Dh + Eg + F = o \end{array}\right\} \alpha)$$

Kann man die Werthe der bis jetzt noch unbestimmten Größen g, h, so wählen, daß die Koeffizienten von x' und y' verschwinden, so nimmt die letztere Gleichung eine einfachere Form an. Diese Bedingung findet Statt wenn man setzt

$$2Ah + Bg + D = o \quad \beta)$$
$$Bh + 2Cg + E = o \quad \gamma)$$

Multiplizirt man $\beta)$ mit B und $\gamma)$ mit 2A, und zieht die Produkte von einander ab, so wird

$$(B^2 - 4AC) g + BD - 2AE = o, \text{ also}$$
$$g = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} \qquad 447)$$

und dieser Werth statt g in $\beta)$ oder $\gamma)$ substituirt gibt

$$h = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \qquad 448)$$

Man sieht daß diese Werthe brauchbar sind, wenn $B^2 - 4AC$ von o verschieden ausfällt, also im Falle der Ellipse oder Hyperbel (323). Multiplizirt man die Gleichung $\beta)$ mit h, und $\gamma)$ mit g und addirt beide Produkte, so erhält man

$$2(Ah^2 + Bgh + Cg^2) + Dh + Eg = o, \text{ folglich}$$
$$Ah^2 + Bgh + Cg^2 = -\tfrac{1}{2}(Dh + Eg)$$
$$= -\frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC}$$

und hiedurch geht die Gleichung $\alpha)$ über in

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + G = o, \text{ wo G den Aus-} \qquad 449)$$

druck $\frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC} + F$ bedeutet.

326. Man lasse nun für die Gleichung 442) den Anfangspunkt der Koordinaten ungeändert, wähle aber in der Ebene der Koordinaten ein anderes rechtwinkliges System, dessen Abscissenaxe mit jener des vorigen den Winkel γ bildet, so hat man, wenn man die neuen Koordinaten mit x'', y'' andeutet

$$x = x'' \cos\gamma - y'' \sin\gamma$$
$$y = x'' \sin\gamma + y'' \cos\gamma$$

und dadurch verwandelt sich die Gleichung 444) in

$$(A\cos^2\gamma - B\sin\gamma\cos\gamma + C\sin^2\gamma)\,y''^2$$
$$+[2(A-C)\sin\gamma\cos\gamma + B(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)]\,x''y''$$
$$+(A\sin^2\gamma + B\sin\gamma\cos\gamma + C\cos^2\gamma)\,x''^2$$
$$+(D\cos\gamma - E\sin\gamma)\,y'' + (D\sin\gamma + E\cos\gamma)x'' + F = 0$$

Setzt man nun den Koeffizienten von $x''y''$ gleich Null, nämlich

$$2(A-C)\sin\gamma\cos\gamma + B(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) = 0$$

d. h. $(A-C)\sin 2\gamma + B\cos 2\gamma = 0$

so hat man $(A-C)\,tg\,2\gamma + B = 0$, und hieraus

$$tg\,2\gamma = -\frac{B}{A-C} = \frac{B}{C-A} \qquad 450)$$

Wegen $tg\,2\gamma = \frac{2\,tg\,\gamma}{1-tg^2\gamma}$ folgt

$$tg\,\gamma = -\cot 2\gamma \pm \sqrt{(\cot^2 2\gamma + 1)} \text{ d. i.}$$

$$tg\,\gamma = \frac{A-C \pm \sqrt{((A-C)^2 + B^2)}}{B} \qquad 451)$$

und die Gleichung 444) verwandelt sich in

$$Hy''^2 + Jx''^2 + Ky'' + Lx'' + F = 0 \qquad 452)$$

327. Die Werthe der Koeffizienten H, J durch A, B, C auszudrücken, setze man zur Abkürzung $\sqrt{((A-C)^2 + B^2)} = M$, also

$$tg\,\gamma = \frac{A-C-M}{B}\text{: nun ist}$$

$$H = A\cos^2\gamma - B\sin\gamma\cos\gamma + C\sin^2\gamma$$
$$= (A - B\,tg\,\gamma + C\,tg^2\gamma)\cos^2\gamma$$
$$J = A\sin^2\gamma + B\sin\gamma\cos\gamma + C\cos^2\gamma$$
$$= (A\,tg^2\gamma + B\,tg\,\gamma + C)\cos^2\gamma$$

daher

$$A - B\,tg\,\gamma + C\,tg^2\gamma = M\left(1 + \frac{2C}{B^2}(M - A + C)\right)$$

$$A\,tg^2\gamma + B\,tg\,\gamma + C = M\left(\frac{2A}{B^2}(M - A + C) - 1\right), \text{ und}$$

$$\cos\gamma = \frac{B^2}{2(M - A + C)M} = \frac{M + A - C}{2M}$$

folglich

$$H = \tfrac{1}{2}(A + C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{((A - C)^2 + B^2)}\ \delta)$$
$$J = \tfrac{1}{2}(A + C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{((A - C)^2 + B^2)}\ \varepsilon)$$

Diese Transformation der Gleichung 444) in 452) findet bei jeder Beschaffenheit der Koeffizienten A, B, C . . . Statt, sie gibt im Falle $B^2 - 4AC = 0$, wo die vorhergehende nicht anwendbar war, $M = A + C$, also $J = 0$ d. h. wenn in der Gleichung 444) die Bedingung Statt hat, daß $B^2 - 4AC = 0$, welcher Fall sich auf eine Parabel bezieht, so fehlt in der Gleichung 452) die zweite Potenz der Abscisse.

V. Mittelpunkt und Durchmesser dieser Linien.

328. Sei $B^2 - AC$ von Null unterschieden, und es stelle die Gleichung 444) ein System von Punkten wie M (Fig. 6) bezogen auf die rechtwinkligen Koordinatenaxen AX, AY: man versetze nun den Anfangspunkt der Koordinaten nach A', so daß

$$\left.\begin{matrix} AB \\ g \end{matrix}\right\} = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC'} \qquad \left.\begin{matrix} BA' \\ h \end{matrix}\right\} = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$$

sei, so sind die neuen den vorigen parallelen Axen

$A'X'$, $A'Y'$ so beschaffen, daß das System von Punkten wie M dessen Abscisse $A'P = x'$, und Ordinate $PM = y'$ gesetzt wird, durch die Gleichung 449) vorgestellt werden kann. Da nun jedes Glied derselben ungeändert bleibt, wenn man $-x'$ statt x', und zugleich $-y'$ statt y' in ihr setzt, so nehme man in der Axe der x', die Gerade $A'P' = A'P$, und senkrecht darauf $P'M' = PM$ so zwar, daß $A'P'$ und $A'P$, ferner $P'M'$ und PM auf entgegengesetzte Seiten der zugehörigen Axen fallen, und man erhält ein zweites System von Punkten wie M', das gleichfalls derselben Gleichung unterworfen ist. Die Kongruenz der Dreiecke $A'MP$, $A'M'P'$ zeigt uns sogleich, daß die Punkte M und M' mit dem Anfangspunkte A' in einer und derselben geraden Linie liegen, und daß sie vom letzteren gleichweit abstehen, und da dieses von jedem anderen Paare von Punkten gilt, deren Verbindungslinie durch den Anfangspunkt A' geht, so ist dieser neue Anfangspunkt A' so beschaffen, daß er jede durch ihn gezogene Sehne eines Systems von Punkten der Gleichung 449) halbiret, wegen welcher Eigenschaft er ein Mittelpunkt dieses Systems genannt wird. Die Koordinaten eines solchen Mittelpunktes sind die oben angegebenen Werthe von g und h.

Die Bedingung, daß $B^2 - 4AC$ von Null verschieden sei, trifft nun bei der Ellipse und Hyperbel; folglich haben beide Kurven einen Mittelpunkt, dessen Lage von den Werthen der Größen g und h abhängt.

329. Löset man die Gleichung 444) in Bezug auf y, und bezeichnet die beiden reellen Werthe von y mit y_1 und y_2, schneidet man ferner auf der Axe AX (Fig. 7) $AP = x$, und errichtet darauf senkrecht $PM = y_1$, $PM' = y_2$; so sind M, M' Punkte, die der Gleichung 444) unterworfen sind, und deren Verbin-

dungslinie $MM' = y_1 - y_2$ ist; halbirt man diese Sehne in N, so hat man

$$y_2 + \frac{y_1 - y_2}{2} = M'P + NM', \text{ nämlich}$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = NP, \text{ die der Abscisse } AP = x$$

korrespondirende Ordinate des Halbirungspunktes N dieser Sehne MM': nun ist bei einer nach y geordneten Gleichung des zweiten Grades der mit verändertem Zeichen genommene Koeffizient von y der Summe ihrer Wurzeln $y_1 + y_2$ gleich, sonach hat man 446)

$\frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{Bx + D}{2A}$, oder wenn man die Ordinate des Halbirungspunktes N mit Y bezeichnet,

$$Y = -\frac{Bx + D}{2A}$$

eine Gleichung des ersten Grades, aus welcher zu ersehen ist, daß die Halbirungspunkte sämmtlicher der Axe der y paralleler Sehnen, welche das durch die Gleichung 444) vorgestellte System von Punkten zuläßt, in einer geraden Linie liegen, deren Neigungswinkel gegen die Abscissenlinie die Größe $-\frac{B}{2A}$ zur Tangente hat. Man nennt eine Gerade, welche eine Folge paralleler Sehnen eines Systems von Punkten halbirt, den diesen Sehnen zugehörigen Durchmesser. Der Winkel, unter welchem der Durchmesser LN seine Sehnen trifft, hat die Größe $-\frac{B}{2A}$ zur Kotangente.

330. Wenden wir das Gesagte auf die Gleichung 452) an, und bezeichnen durch AX'', AY'' die zugehörigen Axen; so kömmt an die Stelle von A, B, C, D, E der

Werth H, o, J, K, L

daher erhält man $Y = -\frac{K}{2H}$. Die Gleichung einer Geraden, welche zur Abscissenlinie in dem Abstande $-\frac{K}{2H}$ parallel läuft, sonach wird die Axe OX'' dem Durchmesser, welcher die auf ihr senkrecht stehenden Sehnen halbirt, in dem Abstande $-\frac{K}{2H}$ parallel laufen, folglich dieser Durchmesser seine Sehnen unter einem rechten Winkel schneiden. Ein solcher Durchmesser heißt vorzugsweise ein Hauptdurchmesser.

Verwechseln wir die Axe der x'' mit jener der y'', und wiederholen wir dieselben Schlüße, so sehen wir, daß sobald $B^2 - 4AC$ folglich auch J von Null verschieden ausfällt, außer dem so eben nachgewiesenen Durchmesser noch ein zweiter, auf jenem senkrecht stehender, vorhanden ist, dessen Entfernung von der Axe der y'' gleich $-\frac{L}{2J}$ ist. Beide Hauptdurchmesser begegnen sich offenbar in einem Punkte, für welchen $x'' = -\frac{L}{2J}$, $y'' = -\frac{K}{2H}$; setzen wir aber in den Ausdrücken von g und h die mit der Gleichung 452) zusammenhängenden Werthe, so erhalten wir für den Mittelpunkt des durch diese Gleichung vorgestellten Systems von Punkten, die Koordinaten $g = -\frac{L}{2J}$, $h = -\frac{K}{2H}$; daher ist der Durchschnitt beider Hauptdurchmesser der Mittelpunkt der Kurve.

331. Wenn in der Gleichung 444) $B^2 - 4AC$ von Null verschieden ist, so kann man beide Transformationen (325, 326) nach einander anwenden, wodurch die Gleichung 444) auf die Form gebracht wird

$$Hy''^2 + Jx''^2 + G = o \qquad 45$$

wo die Größen H, J aus (327) und G aus (325) bekannt sind; und wenn g, h die Koordinaten des Anfangspunktes des neuen Systems in Bezug auf das ursprüngliche Koordinatensystem bezeichnen, und γ den Winkel bedeutet, welchen die neue Axe der x'' mit der Axe der x bildet, so hat man

$$g = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad h = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \text{ und}$$

$$tg\,\gamma = \frac{A - C - \sqrt{((A-C)^2 + B^2)}}{B}.$$

Bei der Ellipse ist nun $B^2 - 4AC$ negativ, oder $B^2 < 4AC$, und man hat

$$(A-C)^2 + B^2 < (A-C)^2 + 4AC \text{ d. h.}$$
$$\sqrt{((A-C)^2 + B^2)} < A + C$$

mithin J positiv. Die Realität der Werthe von y'' erfordert, daß in diesem Falle G negativ, oder

$$Hy''^2 + Jx''^2 = G \text{ sei, woraus}$$

$$y'' = \sqrt{\frac{G - Jx''^2}{H}} \text{ folgt, ein Ausdruck,}$$

der so lange reelle Werthe für y'' gibt, als x'' die Größe $\sqrt{\frac{G}{J}}$ nicht übersteigt: für $x'' = o$ fällt der Werth von y'' am größten aus, und wird $= \sqrt{\frac{G}{H}}$.

Die Ellipse hat in diesem Falle den Anfangspunkt der Koordinaten zum Mittelpunkte, und die Axen der x'', y'' zu Hauptdurchmessern, von welchen sie in 4 kongruente Theile geschnitten wird: man nennt die von ihr begrenzten Theile der beiden Hauptdurchmesser ihre Hauptaxen; bezeichnet man die Hälften derselben,

nämlich $\sqrt{\frac{G}{J}}$, und $\sqrt{\frac{G}{H}}$ durch a und b, so verwandelt sich obige Gleichung in

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1 \qquad 454)$$

332. Wenn $\sqrt{((A-C)^2+B^2)}$ verschwindet, so fallen H und J, folglich auch a und b gleich groß aus, und die Gleichung der Ellipse geht in

$$x''^2+y''^2=a^2 \qquad 455)$$

über. Aber $\sqrt{(x''^2+y''^2)}$ ist die Verbindungslinie des Anfangspunktes der Koordinaten mit irgend einem Punkte der Kurve; daher gehört die letztere Gleichung zu einem Kreise, dessen Halbmesser $=a$ ist. Die Bedingung $(A-C)^2+B^2=0$ kann nur Statt finden, wenn $B=0$, und zugleich $A=C$ ist, sonach sind die Koordinaten des Mittelpunktes des durch die Gleichung

$$Ay^2+Ax^2+Dx+Ey+F=0 \qquad 456)$$

vorgestellten Kreises

$$g=-\frac{E}{2A},\ h=-\frac{D}{2A} \qquad 457)$$

und sein Halbmesser $a=\sqrt{\frac{G}{H}}$ wird durch

$$a=\sqrt{\frac{(D^2+E^2-4AF)}{2A}} \qquad 458)$$

ausgedrückt.

333. Wenn hingegen B^2-4AC in 444) positiv, folglich in der daraus abgeleiteten Gleichung 453) J negativ ist, so hat man

$$Hy''^2-Jx''^2+G=0$$

$$\text{also } y''=\pm\sqrt{\frac{Jx''^2-G}{H}}$$

Für $x''=0$, wird $y''=\pm\sqrt{-\frac{G}{H}}$, woraus erhellet, daß

die Hyperbel der Axe der y'' gar nicht begegnet: für $x'' = \sqrt{\frac{G}{J}}$, wird $y'' = o$; die Axe der x'' wird also von der Kurve in den Abständen $\pm\sqrt{\frac{G}{J}}$ beiderseits begrenzt. Bezeichnet man ihre Länge, welche man die Hauptaxe der Hyperbel nennt, mit $2a$, und Analogie halber die Größe $2\sqrt{\frac{G}{H}}$ mit $2b$, so geht die Gleichung 453) über in

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \qquad 459)$$

Ist $a = b$, welches nur dann Statt findet, wenn $H = J$, also $A = -C$ ist; so heißt die Hyperbel eine gleichseitige, und ihre Gleichung ist

$$x''^2 - y''^2 = a^2 \qquad 460)$$

334. Wenn $B^2 - 4AC = o$, so ist die Gleichung

452) $\qquad Hy''^2 + Ky'' + Lx'' + F = o$

wobei $\qquad H = A + C,\ tg\,\gamma = -\sqrt{\frac{C}{A}}$

$$K = D\cos\gamma - E\sin\gamma = \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{\sqrt{(A+C)}}$$

$$L = D\sin\gamma + E\cos\gamma = \frac{E\sqrt{A} - D\sqrt{C}}{\sqrt{(A+C)}} \text{ ist.}$$

Man setze $x'' = x' + g$, $y'' = y' + h$ so verwandelt sich dieselbe in

$$Hy'^2 + (2Hh + K)y' + Lx' + Hh^2 + Kh + Lg + F = o$$

und bezieht sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Axen jenen der x'' und y'' parallel liegen, und dessen Anfangspunkt im früheren Systeme die Koordinaten g, und h hat. Nimmt man g und h so, daß

$$2Hh + K = o,\ Hh^2 + Kh + Lg + F = o$$

so folgt $h = -\frac{K}{2H}$, $g = \frac{K^2 - 4HF}{4HL}$: hiedurch erhält obige Gleichung die einfachere Gestalt

$Hy^2 + Lx' = 0$, welche man, wenn $-\frac{L}{H} = p$ gesetzt wird, auch so schreiben kann

$$y'^2 = px' \qquad 461)$$

Die beständige Größe p in dieser Gleichung der Parabel, heißt ihr Parameter, und der zur Abscisse $x' = 0$ gehörende Punkt der Kurve ihr Scheitel.

335. Betrachten wir die einfachsten Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ und } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

so erhellet, daß die eine Kurve in die andere übergeht, wenn man a in $-a$ und b in $b\sqrt{-1}$ verwandelt; es können daher alle für die eine Kurve abgeleiteten Ausdrücke, in denen a und b vorkommen, auf die andere übertragen werden, sobald man die angedeuteten Veränderungen trifft. Um aber die Verbindung beider Kurven mit der Parabel nachzuweisen, wollen wir den Anfangspunkt der Koordinaten ohne Aenderung der Richtung der Abscissen- und und Ordinatenaxe in den Durchschnittspunkt der Abscissenlinie mit der Kurve, welcher auch der Scheitel derselben genannt wird, verlegen. Zu diesem Ende muß man, da in beiden Gleichungen der Anfangspunkt der Koordinaten im Mittelpunkte der Kurven steht, statt der Abscisse x in der Ellipse $a - x$, und in der Hyperbel $a + x$ setzen, weil in ersterer Kurve jede Abscisse vom Mittelpunkte aus gerechnet, kleiner, und in letzterer Kurve größer ist, als a: hiedurch erhält man

$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2ax - x^2}{a^2}$ für die Ellipse und 462)

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2ax + x^2}{a^2} \quad \text{für die Hyperbel} \qquad 463)$$

wobei die Abscissen vom Scheitel beider Kurven fortlaufen.

336. Man bezeichne die Größe $\frac{2b^2}{a}$, welche man den Parameter dieser Kurven nennt, mit p; so werden obige Gleichungen

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a} \qquad 464)$$

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a} \qquad 465)$$

Läßt man nun für ein und dasselbe x den Werth für a unendlich zunehmen, p hingegen ungeändert bleiben, so nähert sich der in beiden Gleichungen gegebene Werth von y^2 immer mehr und mehr der Grenze px, und beide Gleichungen gehen allmählig in die Gleichung der Parabel 461) über.

337. Nimmt man den Mittelpunkt A einer Ellipse (Fig. 8) oder einer Hyperbel (Fig. 9) zum Anfangspunkt der Koordinaten, und gestattet der Axe der x jede beliebige Richtung außerhalb der Hauptaxe, so erhält die zugehörige Gleichung die Form

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + G = o \qquad \mu)$$

$$\text{wobei } G = F + \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC}$$

ist, und alle auf die Abscissenlinie OX senkrechten Sehnen, wie MN, mn, werden von einer durch O gehenden Geraden qQ halbirt, deren Gleichung

$$Y = -\frac{B}{2A}x \qquad \nu)$$

ist. Macht man nun Op=OP, so werden die in den Punkten p, P auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenlinie

errichteten Ordinaten pn, PM einander gleich sein, weil der Gleichung μ) Genüge geschieht, wenn man in ihr $-x$ statt x, und $-y$ statt y setzt: da nun $PQ = pq$ ist, so hat man

$$qn = mq = MQ$$

woraus hervorgeht, daß die Sehne Mm dem Durchmesser OG parallel lauft, und von der Axe der y in S halbirt wird. Es ist klar, daß dieses von jeder der OG parallelen Sehne gilt; daher sind OG, OY zwei Durchmesser der Kurve, deren jeder die dem andern parallelen Sehnen in gleiche Theile abtheilt. Man nennt sie konjugirte Durchmesser.

338. Bezeichnet man die Hälften OG, OE zweier konjugirten Durchmesser einer Ellipse durch m und n, so hat man für $x = o$, $y = n$, also gibt die Gleichung μ)

$$n^2 = -\frac{G}{A}$$

Es seien k, l die Koordinaten des Punktes G, so gibt dieselbe Gleichung

$$Al^2 + Bkl + Ck^2 + G = o$$

und weil G in der Geraden OG liegt, die Gleichung ν) $l = -\frac{B}{2A} \cdot k$, daher ergibt sich durch Verbindung beider Gleichungen

$$k^2 = \frac{4AG}{B^2 - 4AC}, \quad l^2 = \frac{B^2 G}{A(B^2 - 4AC)}$$

Es ist aber $m^2 = k^2 + l^2$, folglich

$$m^2 = \frac{G(4A^2 + B^2)}{A(B^2 - 4AC)}$$

ferner ist

$$a^2 = -\frac{G}{J}, \quad b^2 = -\frac{G}{H}, \text{ und nach (327)}$$

$$H = \tfrac{1}{2}(A + C) + \tfrac{1}{2}M, \quad J = \tfrac{1}{2}(A + C) - \tfrac{1}{2}M$$

daher $a^2 + b^2 = -\frac{G(H+J)}{HJ} = \frac{4G(A+C)}{B^2-4AC}$

und $m^2 + n^2 = \frac{4G(A+C)}{B^2-4AC}$, also

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2 \qquad 466)$$

oder die Summe der Quadrate zweier konjugirten Durchmesser ist eine konstante Größe.

339. Der Winkel $EOG = \alpha$, unter welchem sich die konjugirten Durchmesser 2m, 2n schneiden, macht mit dem Winkel GOX unter welchem der erstere gegen die Axe der x geneigt ist, einen rechten aus, und der letztere hat $-\frac{B}{2A}$ zur Tangente (329) folglich ist dieselbe Größe $= \cot\alpha$, und hieraus folgt

$$\sin\alpha = -\frac{2A}{\sqrt{(4A^2+B^2)}}, \text{ und } m^2 n^2 \sin\alpha = -\frac{4G^2}{B^2-4AC}$$

aber es ist auch

$$a^2 b^2 = \frac{G^2}{HJ} = -\frac{4G^2}{B^2-4AC}$$

daher hat man $mn \sin\alpha = ab \qquad 467)$

d. h. das Rechteck aus zwei zusammengehörigen Durchmessern einer Ellipse ist ebenfalls unveränderlich.

340. Die Gleichungen 466) und 467) geben a und b wenn man m, n und α kennt: durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen erhält man sogleich

$$a + b = \sqrt{(m^2 + 2mn\sin\alpha + n^2)} = k$$

und $a - b = \sqrt{(m^2 - 2mn\sin\alpha + n^2)} = k'$

und hieraus $a = \frac{1}{2}(k+k')$, $b = \frac{1}{2}(k-k')$.

Da $\sin\alpha = -\frac{2A}{\sqrt{(4A^2+B^2)}}$ ist, so erhält man

$$\cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{(4A^2+B^2)}}, \text{ und hieraus}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4AB}{4A^2+B^2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{B^2-4A^2}{4A^2+B^2}$$

$$\text{folglich } m^2\sin 2\alpha = -\frac{4BG}{B^2-4AC}$$

$$m^2\cos 2\alpha = \frac{G(B^2-4A^2)}{A(B^2-4AC)}$$

$$\text{also } m^2\cos 2\alpha + n^2 = \frac{4G(C-A)}{B^2-4AC}$$

$$\text{und } \frac{m^2\sin 2\alpha}{m^2\cos 2\alpha+n^2} = \frac{B}{A-C}.$$

Sei β der Winkel, welchen die Hauptaxe $AO = a$ mit der Axe der x bildet, so hat man 450)

$$\frac{B}{A-C} = -tg\,2\beta$$

nun ergänzt der Winkel $AOE = \gamma$, den Winkel β zu einem rechten, oder es ist

$\beta = R - \gamma$, folglich $2\beta = 2R - 2\gamma$, und daher $-tg\,2\beta = tg\,2\gamma$, es besteht demnach die Gleichung

$$tg\,2\gamma = \frac{m^2\sin 2\alpha}{m^2\cos 2\alpha + n^2} \qquad 468)$$

mittelst welcher man die Lage der Hauptaxe gegen den Durchmesser n angeben kann, wenn m, n und der Winkel α bekannt sind.

341. Für die Hyperbel gelten ähnliche Formeln, nur ist eine der Größen m, n imaginär, also ihr Quadrat negativ. In der Parabel sind alle Durchmesser zur Hauptaxe parallel, denn die Voraussetzung $B^2 - 4AC = 0$ gibt für die Tangente der Neigung des zu den Ordinaten der Gleichung μ) gehörenden Durchmessers gegen die Axe der x (329), nämlich für $-\frac{B}{2A}$ den Ausdruck $-\sqrt{\frac{C}{A}}$,

und dieser ist auch die Tangente des Winkels, den die Hauptaxe der Kurve mit der Axe der x bildet.

VII. Polargleichungen dieser Linien.

342. Wenn man von irgend einem Punkte F (Fig. 8) der größeren Hauptaxe einer Ellipse, dessen Abstand vom Mittelpunkte derselben $OF = u$ ist, zu dem auf die Hauptaxe bezogenen Punkte M, dessen Koordinaten x, y sind, eine Gerade $FM = r$ führt, und den Mittelpunkt O für den Anfangspunkt der Koordinaten wählt, so hat man erstlich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ hierauf}$$

$$\left.\begin{matrix} FM \\ r \end{matrix}\right\} = \sqrt{(FD^2 + DM^2)} = \sqrt{[(x-u)^2 + y^2)]}$$

und statt y^2 dessen Werth $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ gesetzt, wird

$r = \sqrt{[u^2 + b^2 - 2ux + x^2(1 - \frac{b^2}{a^2})]}$ oder wenn man

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = k \text{ setzt, wird}$$

$$r = \sqrt{k\,(x^2 - \frac{2ux}{k} + \frac{u^2 + b^2}{k})}$$

Soll nun r in Beziehung auf x rational sein, so muß die Größe unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat werden, man setze daher $\frac{u^2 + b^2}{k} = \frac{u^2}{k^2}$, woraus folgt $u^2(1-k) = kb^2$ d. i.

$$\frac{u^2 b^2}{a^2} = b^2\,(1 - \frac{b^2}{a^2}), \text{ oder}$$

$u^2 = a^2 - b^2$, und hiedurch wird

$$r = (x - \frac{u}{k})\sqrt{k} = x\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} - \frac{u}{\sqrt{k}}$$

$$= \pm x\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} \pm a$$

Da nun r eine positive Größe sein soll, und $\frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} < a$ ist, so finden nur folgende zwei Werthe von r Statt

$$r_1 = a - \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a},\quad r_2 = a + \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} \qquad 469)$$

welche den zwei Werthen von u nämlich

$$+\sqrt{(a^2 - b^2)} \text{ und } -\sqrt{(a^2 - b^2)}$$

zugehören. Es gibt also in der Richtung der größeren Hauptaxe einer Ellipse bloß zwei, diesseits und jenseits des Mittelpunkts liegende, und von demselben gleich weit abstehende Punkte, in Bezug auf welche alle an die Kurve gezogenen Linien sich durch die Abscissen ihrer Endpunkte rational ausdrücken lassen. Man nennt diese zwei Punkte die **Brennpunkte** der Ellipse.

343. Aus den Formeln 469) folgt sogleich

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad 470)$$

d. i. **die Summe der beiden aus den Brennpunkten zu irgend einem Punkte der Ellipse gehenden Geraden, die man vorzugsweise Radienvektoren dieses Punktes nennt, ist jederzeit der größeren Hauptaxe der Kurve gleich.** Hierauf gründet sich ein leichtes Mittel eine Ellipse zu verzeichnen: man spanne nämlich längst der großen Axe der Ellipse, einen Faden, und befestige an dessen beiden Enden Stifte, hierauf versetze man die Stifte in die beiden Brennpunkte, deren Lage in der Hauptaxe gegeben ist, und spanne den Faden vermittelst eines dritten Stiftes, der nun so bewegt wird, daß die

Theile des Fadens immer gerade angezogen bleiben, wodurch denn die verlangte Ellipse zum Vorschein kömmt.

344. Der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkte, durch die Hälfte der größeren Axe getheilt, oder der Ausdruck $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}=e$ heißt die Excentricität der Ellipse. Hieraus folgt

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}, \text{ und } b^2=a^2(1-e^2), \text{ also} \qquad 471)$$

$$y^2=(1-e^2)(a^2-x^2) \qquad 472)$$

Die Ordinate durch den Brennpunkt ergibt sich, wenn man in der Gleichung der Ellipse statt x den Werth $\sqrt{(a^2-b^2)}=ae$ setzt, man erhält

$y=\frac{b^2}{a}=$ dem halben Parameter derselben.

In der kleineren Hauptaxe der Ellipse gibt es keine Brennpunkte, denn verwechselt man b mit a so erhält man für u eine unmögliche Größe.

345. Da für die Hyperbel an die Stelle von b die Größe $b\sqrt{-1}$ zu setzen ist (335) so erhält man $u^2=a^2+b^2$, und weil die Abscissen vom Mittelpunkte gerechnet, bei der Hyperbel beständig größer sind, als die halbe Queraxe a, so geben in der Gleichung 469)

$$r=\pm a\pm\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}$$

bloß die Ausdrücke

$$r_1=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}-a,\quad r_2=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}+a \qquad 473)$$

positive Werthe für r, daher ist in der Hyperbel

$$r_2-r_1=2a \qquad 474)$$

d. h. die Differenz der Radienvektoren jedes Punktes dieser Kurve ist der Queraxe gleich.

346. Versetzt man bei der Ellipse den Anfangspunkt der Koordinaten in den Scheitel der Kurve, so werden die Abscissen der Brennpunkte durch
$a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ und $a + \sqrt{(a^2 - b^2)}$, oder wenn man den einen Ausdruck mit
$a + \sqrt{(a^2 - b^2)}$, den andern mit
$a - \sqrt{(a^2 - b^2}$ multiplizirt und dividirt, durch

$$\frac{b^2}{a + \sqrt{(a^2 - b)}} \text{ und } \frac{b^2}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}$$

ausgedrückt, welche Größen, wenn man in denselben den Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$ einführt, in

$$\frac{\frac{1}{2}p}{1 + \sqrt{(1 - \frac{p}{2a})}} \text{ und } \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \sqrt{(1 - \frac{p}{2a})}}$$

übergehen. Bei dem unendlichen Wachsen von a geht die Ellipse in die Parabel über (336), dabei nähert sich die erstere Größe der Grenze $\frac{1}{4}p$, und die letztere nimmt unendlich zu, woraus erhellet, daß die Parabel bloß einen um ein Viertel der Länge des Parameters vom Scheitel entfernten Brennpunkt besitzt.

Da in dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Seiten r, y und $x - \frac{1}{4}p$ sind
$r = \sqrt{[(x - \frac{1}{4}p)^2 + y^2]}$
$= \sqrt{[(x - \frac{1}{4}p)^2 + px]}$ ist, so ergibt sich hieraus

$$r = \tfrac{1}{4}p + x \qquad 475)$$

347. Bezeichnet man den Neigungswinkel AFM (Fig. 8) mit v, so hat man im Dreiecke FMF'
$F'M^2 = FM^2 + FF'^2 + 2\,FM.FF' \cos v$, oder
da $FF' = 2\,OF = 2ae$ ist,
$r_1^2 = r_2^2 + 4a^2e^2 + 4ae\,r_2 \cos v$, es ist aber 470)
$r_1 = 2a - r_2$ und wenn man statt r_2 bloß r schreibt, wird

$(2a-r)^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos v$, woraus folgt

$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$ die Polargleichung der Ellipse, wo- 476)
bei der Pol im Brennpunkte, und zur Axe die größere Hauptaxe, angenommen wurde. Für die Hyperbel ist a negativ, daher ihre Polargleichung

$$r = -\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos v} \qquad 477)$$

Bei der Parabel hat man 475)

$r = \frac{1}{4}p + x$, und $\cos v = -\frac{FP}{r} = -\frac{\frac{1}{4}p - x}{r}$: eliminirt man aus beiden Gleichungen x, so folgt $r = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos v}$ 478)
die Polargleichung der Parabel.

Setzt man in dem Zähler der Gleichung 476) $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ für die Ellipse, und $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ für die Hyperbel, und substituirt hierauf statt $\frac{b^2}{a}$ den halben Parameter, so ergibt sich für die Ellipse und Hyperbel die Polargleichung

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1+e\cos v} \qquad 479)$$

in welcher zugleich 478) als ein besonderer Fall enthalten ist, wenn man $e = 1$ nimmt; daher stellt 479) die allgemeine Polargleichung der Ellipse, Hyperbel und Parabel vor, je nachdem $e < 1$, $e > 1$ oder $e = 1$ genommen wird.

348. Wir beschließen diesen Gegenstand mit folgenden Aufgaben, welche auf Linien der zweiten Ordnung führen: Zwei Geraden AM, BM (Fig. 10) werden um ihre fixen Punkte A, B so gedreht, daß sie bei ihrem Durchschnitte M beständig einen gleichen Winkel ein-

schließen, man sucht die Kurve welche ihr Durchschnitt beschreibt. Man nehme den zwischen A und B in der Mitte liegenden Punkt O zum Ursprung der Koordinaten, so ist für irgend einen Punkt M der gesuchten Kurve $OP = x$, $PM = y$, und wenn man $AB = c$ setzt, wodurch die Abscissen der Punkte A, und B beziehungsweise $-\frac{1}{2}c$ und $+\frac{1}{2}c$ werden, so erhält man für die Geraden AM, BM die Gleichungen:

$$y = a(x + \tfrac{1}{2}c), \quad y = a'(x - \tfrac{1}{2}c) \quad \lambda)$$

bezeichnet man noch die Tangente des Winkels M mit t, so wird

$$t = \frac{a' - a}{1 + aa'} \quad \mu)$$: substituirt man aber die Werthe von a und a' aus $\lambda)$ in $\mu)$, so folgt

$$t = \frac{cy}{x^2 - \frac{1}{4}c^2 + y^2} \text{ oder}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{cy}{t} - \tfrac{1}{4}c^2 = 0$$

welche Gleichung nach 456) einem Kreise angehört, dessen Halbmesser $CB = \frac{c}{2t}\sqrt{(t^2 + 1)}$, und der Abstand des Mittelpunkts, $CO = \frac{c}{2t}$ ist. Sind die Winkel an M rechte Winkel, so wird $t = \infty$, $CB = \frac{1}{2}c$, $CO = 0$: d. i. die Winkel in einem und demselben Kreissegmente sind einander gleich, und alle Winkel im Halbkreise sind rechte Winkel.

349. Zwei Geraden AN, AX und ein fixer Punkt B (Fig. 11) sind gegeben, man sucht die Kurve MD von der Beschaffenheit, daß der Abstand BM irgend eines Punktes M derselben, der durch eben diesen Punkt gezogenen Senkrechten PN gleich sei? Man kann einen jeden Punkt M dieser Kurve als den Durchschnitt eines

Kreises KL vom Halbmesser BM = r mit einer Geraden PN betrachten, nimmt man nun den Ursprung der Koordinaten in B an, setzt BP = u, AB = p, und bezeichnet die Tangente des Winkels NAX mit t, so sind die Gleichungen des Kreises KL und der Geraden PN

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = u \qquad \mu)$$

Die Gleichung der Geraden AN, welche durch den Punkt A geht, dessen Abscisse AB = p ist, ergibt sich $y = t(x+p)$; hiernach erhält man aus der Bedingungsgleichung BM=PN die folgende: $r = t(u+p)$, welche mit $\mu)$ verbunden gibt

$$y^2 + x^2(1-t^2) - 2t^2\, px - p^2 t^2 = 0 \qquad \nu)$$

Ist $t = 1$, also NAX = 45°, so wird hieraus $y^2 = 2px + p^2$, welches die Gleichung einer Parabel ist, deren Ursprung im Brennpunkte B, der Scheitel in S liegt, und deren Parameter 2 BS = BE = p ist. Hat man $t < 1$, also NAX < 45°, so gehört die Gleichung $\nu)$ einer Ellipse an, welche die Axe AX in zwei Punkten G, H schneidet, deren Abstände vom Ursprunge man erhält, wenn man in $\nu)$ $y = 0$ setzt, und die der Gleichung zugehörigen Werthe von x bestimmt, man findet so,

$BG = -\frac{pt}{1+t}$, $BH = \frac{pt}{1-t}$, also $BC = \frac{pt^2}{1-t}$: hieraus ergeben sich die Halbaxen

$$a = \frac{pt}{1-t^2}, \quad b = \frac{pt}{\sqrt{(1-t^2)}}.$$

Ist AN zu AX parallel, so erhält die veränderliche Gerade PN immer denselben Werth, und die Kurve DM geht in einen Kreis über.

Ist endlich $t > 1$, oder NAX > 45°, so gibt dann die Gleichung $\nu)$ zu erkennen, daß die zum Vorschein kommende Kurve eine Hyperbel sei.

350. Nehmen wir nun an, eine Gerade AB (Fig. 12) von gegebener Länge, bewege sich so, daß ihre Endpunkte A, B auf den Schenkeln des gegebenen Winkels XCY beständig anzutreffen sind, man sucht die Kurve, welche ein der Lage nach gegebener Punkt M derselben Geraden zurücklegt? Sei $AM = a$, $MB = b$, q der Kosinus des gegebenen Koordinatenwinkels, $y = \alpha x + \beta$ die Gleichung der Geraden AB, und $x = \gamma$, die Gleichung der Geraden PM, durch deren Durchschnitt der Punkt M zum Vorschein kommt, so ist im Dreiecke PMB wenn man $PB = z$ setzt, $b^2 = z^2 + PM^2 - 2qz.PM$, ferner hat man wegen den Parallelen PM, CY $b : a = z : CP$, woraus $az = bx$ folgt. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe z, so erhält man
$a^2 b^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2abqxy$, welches eine Gleichung für eine Ellipse ist, deren Ursprung im Mittelpunkte derselben liegt. Ist der Winkel XCY ein rechter, so erhält man $q = o$, und die Gleichung wird
$a^2 b^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$, welcher Ausdruck eine Ellipse anzeigt, deren Halbaxen a und b sind.

Hieraus folgt eine neue Methode eine Ellipse zu verzeichnen: man ziehe zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels XCY eine Gerade AB, welche der Summe beider Halbaxen a und b gleich wäre, schneide auf derselben $AM = a$ ab, so ist M ein Punkt der Ellipse: bewegt man nun die Gerade AB so, daß ihre Endpunkte stets auf den Schenkeln des Winkels XCY zu stehen kommen; so beschreibt während dieser Bewegung der Punkt M nach und nach den elliptischen Quadranten DME.

VIII. Tangenten krummer Linien.

351. Wenn man durch zwei zu irgend einer Kurve gehörenden Punkte, deren Koordinaten in Bezug auf ein

rechtwinkliges System x, y und $x+\delta x$, $y+\delta y$ sind, eine Gerade zieht, so läßt sich die Gleichung der Geraden 413) durch $y'-y=\frac{\delta y}{\delta x}(x'-x)$ vorstellen, wobei x', y' die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden bedeuten. Je mehr nun der Punkt, dessen Koordinaten $x+\delta x$, $y+\delta y$ dem Punkte x, y näher gebracht wird, desto mehr nähert sich die durch obige Gleichung vorgestellte Sekante einer durch den Punkt x, y gezogenen Tangente, deren Gleichung daher von den Werthen δx, δy unabhängig sein muß; es geht aber dann der Differenzquotient $\frac{\delta y}{\delta x}$ in den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ über, man hat sonach für die, eine Kurve berührende gerade Linie die Gleichung

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x) \qquad 480)$$

wo $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente der Neigung der Berührungslinie gegen die Axe der x bedeutet (307). Bezeichnet man diesen Winkel mit α, so ergibt sich hieraus

$$\cos\alpha=\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}, \text{ und} \qquad 481)$$

$$\sin\alpha=\frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} \qquad 482)$$

352. Eine durch den Berührungspunkt einer Tangente auf ihr senkrecht stehende Gerade heißt eine Normale des zugehörigen Punktes der Kurve. Die Gleichung der Normale ergibt sich aus (313)

$$y'-y=-\frac{dx}{dy}(x'-x) \qquad 483)$$

Beide Gleichungen drücken aber bloß die Richtung genannter Linien aus, ihre Größe wird beziehungs-

weise durch die Stücke der Tangente und Normale gemessen, welche zwischen der Abscissenaxe und dem Berührungspunkte enthalten sind. Man nennt überdieß das Stück der Abscissenlinie zwischen der Tangente und der Ordinate des Berührungspunktes die Subtangente, und das Stück der Abscissenlinie zwischen der Normale und Ordinate des Berührungspunktes die Subnormale.

353. Setzt man in der Gleichung 480) $y' = o$, so erhält man $x' = x - y\frac{dx}{dy}$ oder das Stück der Abscissenlinie zwischen dem Anfangspunkte der Koordinaten und dem Punkte, wo die Tangente der Abscissenlinie begegnet, dieses von der Abscisse x abgezogen, gibt die Subtangente $= \frac{y\,dx}{dy}$. Eben so folgt aus 483) die 484) Entfernung des Durchschnittes der Normale mit der Abscissenlinie $x' = x + y\frac{dy}{dx}$, und hieraus

die Subnormale $= y\frac{dy}{dx}$. Da die Tangente mit der Ordinate 485) und Subtangente, und die Normale mit der Ordinate und Subnormale rechtwinklige Dreiecke bildet, wovon die Tangente und Normale beziehungsweise Hypothenusen sind, so hat man

die Tangente $= y\sqrt{(1+\frac{dx^2}{dy^2})} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, und 486)

die Normale $= y\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ 487)

354. Um diese Formeln auf die Linien der zweiten Ordnung anzuwenden, hat man zuvörderst für die Ellipse, deren Hauptaxen $2a$ und $2b$ sind, und deren

Mittelpunkt und größere Hauptaxe der Anfangspunkt und die Axe der x sei, die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Hieraus folgt $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$, und dieser Werth in 480) substituirt gibt $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$ 488)

die Gleichung der zu dem Punkte x, y gezogenen Tangente der Ellipse. Setzt man den Werth $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$ in 484), so erhält man die Subtangente der Ellipse $=-\frac{a^2-x^2}{x}$: das Zeichen — bezieht 489) sich auf die Lage dieser Subtangente, welche jener in der Formel 484) entgegengesetzt ist. Aus 485) folgt die Subnormale der Ellipse $=-\frac{b^2x}{a^2}$, aus 486) und 490) 487) hingegen

die Tangente dieser Kurve $=y\frac{\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)}}{b^2x}$, 491)

und die Normale $=\frac{\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)}}{a^2}$. 492)

355. Aus der Gleichung für die Hyperbel, deren Mittelpunkt nnd Querare $=2a$ als Anfangspunkt der Koordinaten und Abscissenare dienen, nämlich

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2}{y^2}=1$$

ergibt sich $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$, folglich gibt die Formel 480)

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1$$ 493)

als Gleichung der zu dem Punkte x, y gezogenen Tangente. Die Subtangente ist hier $= \frac{x^2 - a^2}{x}$, die 494)

Subnormale $= \frac{b^2 x}{a^2}$ u. s. f.

356. Der Parabel gehört, in Bezug auf den Scheitel als Anfangspunkt der Koordinaten und die Hauptaxe als Abscissenlinie die Gleichung $y^2 = px$. Hieraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}, \text{ also} \qquad 495)$$

$$yy' = \tfrac{1}{2} p(x' + x) \qquad 496)$$

als Gleichung der zur Abscisse x gehörenden Tangente. Der Werth der Subtangente findet sich aus 484) gleich 2x, und der Subnormale aus 485) $= \frac{1}{2}p$. Hierauf gründet sich eine leichte Methode zu einem gegebenen Punkte der Parabel eine Tangente zu ziehen: man bestimmt nämlich die Abscisse x dieses Punktes, und trägt sie, indem man die Hauptaxe über den Scheitel hinaus verlängert, von dem Scheitel an auf dieselbe auf, und verbindet den sich ergebenden Punkt mit dem gegebenen Punkte der Kurve mittelst einer Geraden, welche sofort die gesuchte Tangente sein wird.

357. Schneidet die Tangente MT (Fig. 11) die verlängerte Abscissenlinie in T, und sind B, F die beiden Brennpunkte der Ellipse, so ist

$$FT = \text{subtang} - FP = \frac{a^2 - x^2}{x} + x - ae$$

$$= \frac{a^2}{x} - ae = a\,\frac{(a - ex)}{x} = \frac{ar_1}{x}, \text{ und weil}$$

$x = \frac{a - r_1}{e}$, so wird $FT = \frac{aer_1}{a - r_1}$: und eben so folgt

$$BT = \frac{aer_2}{a - r_2}, \text{ also ist auch}$$

$$\frac{FT}{BT} = \frac{r_1}{r_2}, \text{ oder } \frac{FT}{r_1} = \frac{BT}{r_2}; \text{ es ist aber}$$

$$\frac{FT}{r_1} = \frac{\sin FMT}{\sin T} \text{ und}$$

$$\frac{BT}{r_2} = \frac{\sin BMT}{\sin T} = \frac{\sin BMt}{\sin T}, \text{ also ist auch}$$

$FMT = BMT$, oder die Winkel der Tangente mit den Radienvektoren sind für jeden Punkt der Ellipse einander gleich. Auf ähnliche Art ergibt sich dieselbe Eigenschaft für die Hyperbel.

Will man daher an einen gegebenen Punkt der Ellipse oder Hyperbel eine Tangente ziehen, so braucht man nur den äußern Winkel, der von beiden an ihn gezogenen Radienvektoren eingeschlossen wird, zu halbiren, und die Halbirungslinie ist die geforderte Tangente.

358. Sei AMN (Fig. 13) eine auf die Hauptaxe bezogene Parabel; man setze $AFM = v$, $FMT = w$, so ist $w = (180° - v) - MTX$., und daher

$$tg\, w = tg\,[180° - (v + MTX)]$$

$$= -\frac{tg\, MTX + tg\, v}{1 - tg\, MTX\, tg\, v}, \text{ es ist aber 495)}$$

$$tg\, MTX = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} \text{ und}$$

$$tg\, v = -\frac{y}{x - \frac{1}{4}p}, \text{ also ist auch}$$

$$tg\, w = \frac{p}{2y} = tg\, MTX, \text{ oder es ist}$$

$$w = MTX = BMt$$

Zieht man also durch den Punkt M der Parabel eine zur Hauptaxe parallele Gerade MB; so bildet die Tangente mit ihr und dem Radiusvektor gleiche Winkel.

Auf dieser Eigenschaft der Ellipse Hyperbel und Parabel gründet sich ihre Anwendung zu Sprachgewölben, Reverberen, Brennspiegeln — sonach auch die Benennung der Brennpunkte.

359. Das Stück der Abscissenlinie zwischen der Tangente eines Punktes und dem Anfangspunkte der Koordinaten ist, wie bereits angeführt wurde, gleich $x-\frac{ydx}{dy}$, ferner ist das zwischen dem Anfangspunkte und der Tangente befindliche Stück der Ordinatenaxe $=y-\frac{xdy}{dx}$. Wenn sich nun diese beiden Größen, oder auch nur eine derselben, einer bestimmten Grenze nähern, je größer man x nimmt, so nähert sich die Tangente der Kurve, und daher auch die Kurve selbst bei dem unendlichen Wachsen der Abscisse, ohne Ende einer geraden Linie, ohne jedoch in diese zu übergehen. Eine Gerade von dieser Eigenschaft heißt eine Asymptote.

Unter den Linien der zweiten Ordnung läßt bloß die Hyperbel Asymptoten zu. Die Tangente dieser Kurve gibt sogleich $\frac{x'}{a^2}-\frac{y}{x}\cdot\frac{y'}{b^2}=\frac{1}{x}$: setzt man hierin statt $\frac{y}{x}$ die Größe $\frac{b}{a}\sqrt{(1-\frac{a^2}{x^2})}$ aus der Gleichung der Hyperbel, so erhält man $\frac{x'}{a^2}-\frac{y'}{ab}\sqrt{(1-\frac{a^2}{x^2})}=\frac{1}{x}$ welcher Ausdruck bei der unendlichen Zunahme von x in

$$\frac{x'}{a^2}\mp\frac{y'}{ab}=0$$

übergeht. Hieraus folgt

$$y'=\pm\frac{b}{a}x' \qquad 497)$$

es entsprechen daher der Hyperbel, zwei

im Mittelpunkte derselben sich schneidende und gegen die Queraxe unter gleichen, der Tangente $\frac{b}{a}$ zugehörenden, Winkeln geneigte Asymptoten.

360. Man errichte an den Endpunkten der Hauptaxe AB (Fig. 14) die Senkrechten AK, BH der halben Queraxe einer Hyperbel gleich, und ziehe durch den Mittelpunkt C derselbe die Geraden CK, CH welche über den Punkt C nach beiden Seiten verlängert, die Asymptoten der Hyperbel geben; so ist für irgend eine Abscisse $CP = x$, die Gerade $PR = \frac{b}{a}x$, und da

$PM = y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$, also

$PR^2 - PM^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2$, oder

$(PR + PM)(PR - PM) = b^2$ ist, so folgt

$$MR' \times MR = b^2 \quad \mu)$$

Bezieht man nun die Kurve auf ihre Asymptoten CR, CR' so ist $CS = t$, $SM = u$ gesetzt,

$$\left.\begin{matrix} CL \\ \sqrt{(a^2+b^2)} \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} KL \\ 2b \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} MN \\ t \end{matrix}\right\} : MR = \frac{2bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\left.\begin{matrix} CK \\ \sqrt{(a^2+b^2)} \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} KL \\ ab \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} SM \\ u \end{matrix}\right\} : R'M = \frac{2bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

hienach erhält der Ausdruck μ) folgende Gestalt:

$b^2 = \frac{2bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \cdot \frac{2bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{4b^2tu}{a^2+b^2}$, und die Gleichung der Hyperbel auf ihre Asymptoten bezogen, wird $tu = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$ 498)

361. Wenn man von den Brennpunkten F, F' (Fig. 12) einer Ellipse auf die Tangente irgend eines Punktes M' die Perpendikel FN, F'N' fällt, den geometrischen Ort

ihrer Endpunkte N, N' zu finden? Die Gleichung der Tangente einer Ellipse ist $a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2$ $\mu)$ wenn x', y' die Koordinaten des Punktes M' vorstellen, die Gleichung der durch den Brennpunkt gezogenen Geraden FN sei $y = \alpha(x+\beta)$, wo β die Excentrizität CF bedeutet: da diese Gerade auf der Tangente senkrecht steht, so findet nach (313) die Bedingungsgleichung Statt, daß $\alpha b^2 x' = a^2 y'$ sei, dieß gibt
$b^2 x' y = a^2 y'(x+\beta)$ $\nu)$. Eliminirt man aus den Gleichungen $\mu)$ und $\nu)$ die Größen x', y', und substituirt ihre Werthe in die Gleichung $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$, so folgt $b^2 y^2 + a^2 (x+\beta)^2 = [y^2 + x(x+\beta)]^2$
welches entwickelt gibt
$y^4 + y^2 [2x(x+\beta) - b^2] + (x+\beta)^2 (x^2 - a^2) = 0$
und hierin $\beta^2 - a^2$ statt $-b^2$ gesetzt, wird
$y^4 + y^2 [(x+\beta)^2 + x^2 - a^2] + (x+\beta)^2 (x^2 - a^2) = 0$
zerlegt man diese Gleichung in ihre Faktoren, so erhält man $(y^2 + x^2 - a^2)[y^2 + (x+\beta)^2] = 0$
woraus $y^2 + x^2 = a^2$ folgt; es ist sonach *der Umfang eines der Ellipse umschriebenen Kreises der Ort, wo die von den Brennpunkten auf die Tangenten der Ellipse gefällten Perpendikel denselben begegnen.*

362. Da der gefundene Ausdruck von der Halbare b nicht abhängt, so ist auch in der *Hyperbel* der um die Hauptaxe beschriebene Kreis der Ort, in welchem jene Perpendikel die Tangenten treffen. Wird aber a unendlich, so geht die Ellipse in eine Parabel, und der mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis in eine gerade Linie über; es ist demnach die im Scheitel einer Parabel auf ihre Axe senkrecht gezogene Gerade, der Ort, in welchem die von dem Brennpunkte auf die Tangenten gefällten Perpendikel derselben begegnen.

IX. Berührungsordnungen krummer Linien.

363. Sei $y = fx$ die Gleichung einer Kurve zwischen ihren rechtwinkligen Koordinaten x, y und bestimmten, im Funktionszeichen begriffenen Konstanten: und ebenso $y' = Fx'$ die Gleichung einer zweiten Kurve, zwischen ihren rechtwinkligen Koordinaten x', y' bezogen auf denselben Anfangspunkt und dieselben Axen mit der ersteren, und einer Anzahl von unbestimmten Konstanten, welche erst durch gegebene Bedingungen bestimmt werden sollen.

Wenn beide Kurven sich in irgend einem Punkte schneiden, so gehören zu dem ihnen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte die Koordinaten $x = x'$ und $y = y'$. Für einen nächstfolgenden Werth der Abscisse x, gehört vermöge des Tellor'schen Satzes, in der ersten Kurve, die Ordinate

$$y + kf_1 x + \tfrac{1}{2} k^2 f_2 x + \tfrac{1}{3}! k^3 f_3 x + \ldots$$

und in der zweiten Kurve, die Ordinate

$$y' + kF_1 x' + \tfrac{1}{2} k^2 F_2 x' + \tfrac{1}{3}! k^3 F_3 x' + \ldots$$

also ist für diesen nächstfolgenden Punkt, die Differenz δ beider Ordinaten, da $y = y'$ war, gleich

$$k(f_1 x - F_1 x') + \tfrac{1}{2} k^2 (f_2 x - F_2 x') + \tfrac{1}{3}! k^3 (f_3 x - F_3 x') + \ldots$$

Nehmen wir daher an, daß für jenen Durchschnittspunkt beider Kurven, auch noch die Bedingung Statt habe

$$f_1 x = F_1 x', \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'};$$

und denken uns eine dritte Kurve durch diesen Punkt gezogen, deren Gleichung $y'' = \varphi x''$ wäre, so ist erstlich $y = y''$, $x = x''$, und die Differenz der nächsten Ordinaten bei der ersten und dritten Kurve wäre

$$D = (f_1 x - \varphi_1 x'') + \tfrac{1}{2} k^2 (f_2 x - \varphi_2 x'') + \tfrac{1}{3}! k^3 (f_3 x - \varphi_3 x'') + \ldots$$

in welchen Ausdrücken man k immer so klein annehmen kann, daß D größer wird als δ, wofern nicht $f_1 x = \varphi_1 x''$, oder $\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dx''}$ Statt hat; es läßt sich daher durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten Kurven keine andere dritte führen, wenn sie nicht derselben Bedingungsgleichung genug thut, die zwischen beiden ersten Statt findet. Man sagt daher, daß zwei Kurven eine Berührung der ersten Ordnung haben, wenn für sie die Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$ gilt.

Nehmen wir ferner an, daß zwischen diesen Kurven nebst der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$, auch noch die zweite Bedingungsgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2}$ Statt hat, so wird zwischen ihnen keine andere Kurve durchgehen können, für welche nicht beide Bedingungsgleichungen Statt haben, oder jene beiden Kurven, werden in ihrem gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung der zweiten Ordnung haben: gilt überdieß für beide Kurven noch die Bedingungsgleichung $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y'}{dx'^3}$, so haben sie eine Berührung der dritten Ordnung, und allgemein zwei Kurven haben in ihrem gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung der nten Ordnung, wenn die n ersten Differentiale der Ordinaten dieser Kurven für die Abscisse des Berührungspunktes gleiche Werthe annehmen.

Bestimmt man diesen Bedingungsgleichungen gemäß die in der Gleichung $y' = Fx'$ erscheinenden unbestimmten Größen, so wird hiedurch die Lage dieser Kurve, als auch die Dimension ihrer Axen vollständig bestimmt.

364. Sei $y' = ax' + b$ die Gleichung einer Geraden, und $y = fx$ die Gleichung irgend einer Kurve: soll nun zwischen beiden eine Berührung der ersten Ordnung Statt haben, so hat man für den beiden gemeinschaftlichen Punkt $y = y'$, $x = x'$

und die Bedingungsgleichung $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} = a$, daher

$b = y' - ax' = y - \frac{x dy}{dx}$. Setzt man diese Werthe der Konstanten a, b in die Gleichung der Geraden, so erhält man $y' - y = (x' - x)\frac{dy}{dx}$ für die Glei- 499)
chung einer Geraden, die mit der Kurve $y = fx$ eine Berührung der ersten Ordnung hat. Wir sehen, daß diese Gleichung einer Tangente der krummen Linie zugehört, und daß die Berührung der ersten Ordnung nur zwischen einer Geraden und einer Kurve vor sich gehen kann, weil eine Bedingungsgleichung nicht zureichen würde, die berührende Kurve der Lage und Größe nach zu bestimmen.

365. Den Kreis zu finden, der mit einer Kurve, welche durch eine Gleichung zwischen ihren rechtwinkligen Koordinaten x und y gegeben ist, eine Berührung der zweiten Ordnung hat, bezeichne man mit a den Halbmesser dieses Kreises, und mit g, h die Koordinaten seines Mittelpunktes, so ist die Gleichung desselben

$$(x' - g)^2 + (y' - h)^2 = a^2$$

wobei in der allgemeinen Gleichung des Kreises

$$Ay^2 + Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$g = \frac{E}{2A},\quad h = \frac{D}{2A},\quad a = \frac{\sqrt{(D^2 + E^2 - 4AF)}}{2A}$$

bedeutet. Da dieser Kreis durch den Punkt der Kurve

geht, deſſen Koordinaten x, y ſind, ſo iſt für dieſen gemeinſchaftlichen Punkt

$$(x-g)^2+(y-h)^2=a^2 \quad \mu)$$

und wegen der an ihm Statt findenden Berührung der zweiten Ordnung ſind die Bedingungsgleichungen

$$(x-g)\,dx+(y-h)\,dy=0 \quad \nu)$$

$$dx^2+(x-g)\,d^2x+dy^2+(y-h)\,d^2y=0 \quad \varrho)$$

Multiplizirt man die Gleichung ν) mit d^2y und ϱ) mit dy, ſo gibt der Unterſchied der Produkte

$$(x-g)(dx\,d^2y-d^2x\,dy)-dx^2\,dy-dy^3=0$$

$$\text{alſo } g-x=-\frac{dy\,(dx^2+dy^2)}{dx.\,d^2y-dy.\,d^2x} \quad \ldots \sigma)$$

Die Gleichung ν) gibt unmittelbar

$h-y=-(g-x)\frac{dx}{dy}$, daher wegen σ) wird

$h-y=\frac{dx\,(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$ τ), und wenn man die Werthe von $g-x$, $h-y$ in die Gleichung μ) ſetzt,

$$\text{wird } a=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x} \qquad 500)$$

welcher Ausdruck, wenn dx konſtant iſt, in

$$a=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} \text{ übergeht.} \qquad 501)$$

Man nennt einen ſolchen Kreis den Krümmungskreis, deſſen Halbmeſſer den Krümmungshalbmeſſer, und deſſen Mittelpunkt den Krümmungsmittelpunkt für einen beſtimmten Punkt der gegebenen Kurve.

Bezeichnet man die Länge der zu dem Punkte x, y einer Kurve gehörenden Normale mit N und deſſen Krümmungshalbmeſſer mit R, ſo hat man wegen 487)

$$N = y\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}, \text{ also}$$

$$R = \frac{N^3\,dx^2}{y^3\,d^2y} \qquad 502)$$

366. Sei die gegebene Kurve eine Parabel, so ist

$$y^2 = px, \text{ also } dy = \frac{p\,dx}{2y} = \tfrac{1}{2}\,dx\sqrt{\frac{p}{x}},$$

$$d^2y = \tfrac{1}{2}dx.\,d\left(\frac{p}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{4}dx^2\cdot\frac{p}{x^2\sqrt{\frac{p}{x}}} = -\tfrac{1}{4}dx^2\sqrt{\frac{p}{x^3}} \text{ und } 503)$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{(1+\frac{p}{4x})}. \text{ Substituirt} \qquad 504)$$

man diese Werthe in den Gleichungen $\sigma)$ $\tau)$ und 501), so erhält man

$$g = 3x + \tfrac{1}{2}p,\ h = -4x\sqrt{\frac{x}{p}}, \text{ und}$$

$$R = -\frac{4x(1+\frac{p}{4}x)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{p}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{16x^3\left(\frac{4x+p}{4x}\right)^3}{p}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(4x+p)^3}{p}} \qquad 505)$$

Für den Scheitel der Parabel ist $x = o$, also $g = \frac{1}{2}p$, $h = o$, $R = \frac{1}{2}p$, hingegen für die Endpunkte des Parameters hat man

$x = \frac{1}{4}p$, also $g = \frac{3}{4}p$, $h = -\frac{1}{2}p$, und $R = p\sqrt{2}$, sonach ist der Krümmungshalbmesser der letzteren Punkte beinahe dreimahl größer als im Scheitel.

367. In der Ellipse hat man nach 472)

$$y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2),$$

hieraus folgt

$$dy = -\frac{x(1-e)^2\,dx}{y}, \text{ und}$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{\frac{a^2-x^2+x^2(1-e^2)}{a^2-x^2}}, \text{ nämlich}$$

$$= dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}} \qquad 506)$$

daher $d^2y = -\frac{a^2\,dx^2(1-e^2)^2}{y^3}$, und

$$R = \frac{\left(\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-e^2)^2}$$

oder wenn man statt a^2-x^2 dessen Werth $\frac{y^2}{1-e^2}$ substituirt, wird

$$R = -\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{(a^2-e^2x^2)^3}{1-e^2}} \qquad 507)$$

Man hat aber auch aus (354)

$$dy = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x\,dx}{y}, \text{ mithin}$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dx}{a^2y}\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)}, \text{ und} \qquad 508)$$

$$R = -\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} \qquad 509)$$

Im Kreise ist $a=b$, daher gibt die Formel 508)

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{a\,dx}{y} \qquad 510)$$

und die Formel 509)

$$R = -a$$

Die Gleichung der Hyperbel gibt $dy = \frac{b^2x\,dx}{a^2y}$, und hieraus folgt

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{\frac{(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4y^2}}, \text{ aber}$$

$$a^4y^2 = a^2b^2(x^2-a^2), \text{ mithin}$$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\frac{x^2(a^2+b^2)-a^4}{a^2(x^2-a^2)}}$, oder wegen $\frac{a^2+b^2}{a^2} = e^2$, wird

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}} \qquad 511)$$

X. Rektifikation, Evolution und Quadratur.

368. Einen Bogen einer Kurve rektifiziren, heißt seine Länge in Zahlen angeben, deren Einheit irgend eine bekannte gerade Linie ist. Wenn man durch die Endpunkte des Bogens MM′ (Fig. 15) einer Kurve, deren Gleichung $y = fx$ ist, die Tangenten MT, M′T′ die sich in O durchschneiden führt, und die Sehne MM′ zieht; so hat man, nach dem bekannten Grundsatze des Archimedes MO + OM′ > Bogen MM′, und da im Dreiecke OBM′ der Winkel M′ ein äußerer, also größer ist, als der innere Winkel B, so ist auch OB > OM′, daher um so mehr MO + OB > Bogen MM′ d. i. MB > Bogen MM′: dagegen ist im Dreiecke MT′M′ die Seite M′T′ < MM′ und MM′ < Bogen MM′, folglich M′T′ < Bogen MM′; es ist also von den beiden an die Endpunkte des Bogens geführten Tangenten, die eine größer, die andere kleiner, als der Bogen.

Sei nun die Länge des Bogens AM = s irgend eine Funktion der Abscisse, nämlich $s = Fx$, daher, wenn die Abscisse um ein beliebiges Stück PP′ = k zunimmt, wird $AM' = F(x+k)$; so hat man $MM' = F(x+k) - Fx$: zieht man nun MC parallel zu M′T′, so ist M′T′ = MC, und dem so eben Bewiesenen zu Folge $F(x+k) - Fx$ grö-

ßer als MC; und kleiner als MB, man kann also zwischen MC und MB eine Linie MD so nehmen, daß

$$F(x+k) - Fx = MD \text{ sei } \lambda).$$

Führt man noch ME parallel zu AX, so ist der Winkel DME < BME, und DME > CME, also auch

$tg\,DME < tg\,BME$, und $tg\,DME > tg\,CME$: nun ist

$tg\,BME = \frac{dy}{dx} = f_1 x$, $tg\,CME = f_1(x+k)$; daher hat man

$tg\,DME < f_1 x$ und zugleich $tg\,DME > f_1(x+k)$, man kann sonach $k' < k$ so nehmen, daß

$tg\,DME = f_1(x+k')$ sei: dieß gibt

$MD = ME.\,sec\,DME = k\sqrt{(1+tg^2\,DME)}$

$= k\sqrt{[1+(f_1(x+k'))^2]}$, daher wird aus λ)

$$F(x+k) - Fx = k\sqrt{[1+(f_1(x+k'))^2]}: \quad \mu)$$

entwickelt man das Glied linker Hand mittelst der Taylor'schen Reihe, und dividirt beiderseits mit k, so erhält man

$$F_1 x + \tfrac{1}{2}!\,k F_2 x + \tfrac{1}{3}!\,k^2 F_3 x + \ldots = \sqrt{[1+(f_1(x+k'))^2]}$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von k bestehen muß, also auch für $k = 0$, wodurch auch $k' = 0$ wird, so hat man dann

$F_1 x = \sqrt{[1+(f_1 x)^2]}$, nämlich

$\frac{dFx}{dx} = \sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$, woraus sofort folgt

$$ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} \qquad 512)$$

369. Bei der Parabel hat man nach 504)

$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{\frac{(4x+p)}{4x}}$, daher

$s = \int dx \sqrt{\left(\frac{4x+p}{4x}\right)}$: man setze $\frac{4x+p}{4x} = z^2$, so ist

$x = \frac{p}{4(z^2-1)}$, $dx = -\frac{pz\,dz}{2(z^2-1)^2}$, also

$ds = -\frac{pz^2\,dz}{2(z^2-1)^2}$; nun hat man nach (258. a)

$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-1)^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{2z}{z^2-1} + \lambda\frac{z+1}{z-1}\right)$, folglich ist

$$s = \frac{1}{8}p\left(\frac{2z}{z^2-1} + \lambda\frac{z+1}{z-1}\right)$$

und wenn man den Werth von z wieder herstellt, wird

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{(px+4x^2)} + \frac{1}{8}p\lambda\frac{\sqrt{(4x+p)}+2\sqrt{x}}{\sqrt{(4x+p)}-2\sqrt{x}} + C$$

Soll der Bögen vom Scheitel der Parabel gerechnet werden, so verschwindet s mit x, mithin ist $C = o$: unter dieser Voraussetzung erhält man, wenn der Nenner rational gemacht, und y^2 statt px gesetzt wird

$$s = \sqrt{(\tfrac{1}{4}y^2 + x^2)} + \frac{1}{4}p\lambda\left(\frac{2y}{p} + \sqrt{(1+\frac{4y^2}{p^2})}\right) \qquad 513)$$

Für $x = \frac{1}{4}p$, wird $y = \frac{1}{2}p$, also
$s = \frac{1}{4}p(\sqrt{2} + \lambda(1+\sqrt{2}))$: für $x = p = y$, wird
$s = \frac{1}{2}p\sqrt{5} + \frac{1}{4}p\lambda(2+\sqrt{5})$.

370. Bei der Ellipse ist $ds = dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}$

ein Ausdruck, der sich auf keine bekannte Weise rational machen läßt, und dessen Integral bis jetzt in endlicher Form nicht hat hergestellt werden können, und eines von denen ist, welche unter dem Namen der elliptischen Transzendenten von Legendre und Jacobi behandelt wurden. Setzt man aber $x = a\sin u$, also $dx = adu\cos u$, so erhält man $ds = adu\sqrt{(1-\sin^2 u)}$, oder wenn man die Wurzelgröße entwickelt
$ds =$

$$adu\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 u - \frac{1}{2.4}e^4\sin^4 u - \frac{1.3}{2.4.6}e^6\sin^6 u - \ldots\right)$$

nun ist nach 380) für $n = o$, und $p = \sin u$, $q = \cos u$

$\int du\, p^m = -\frac{1}{m} p^{m-1} q + \frac{m-1}{m} \int du p^{m-2}$, mithin

$\int du p^2 = -\frac{1}{2} pq + \frac{1}{2} u$

$\int du p^4 = -\frac{1}{4} p^3 q + \frac{3}{4} \int du p^2 = -\frac{1}{4} p^3 q - \frac{1.3}{2.4} pq + \frac{1.3}{2.4} u$

$\int du p^6 = -\frac{1}{6} p^5 q - \frac{1.5}{4.6} p^3 q - \frac{1.3.5}{2.4.6} pq + \frac{1.3.5}{2.4.6} u$

u. s. f. Man erhält sonach

$$\frac{s}{a} = u - \tfrac{1}{2} e^2 (\tfrac{1}{2} u - \tfrac{1}{2} pq)$$

$$- \frac{1}{2.4} e^4 (\frac{1.3}{2.4} u - \frac{1.3}{2.4} pq - \tfrac{1}{4} p^3 q)$$

$$- \frac{1.3}{2.4.6} e^6 (\frac{1.3.5}{2.4.6} u - \frac{1.3.5}{2.4.6} pq - \frac{1.5}{4.6} p^2 q - \tfrac{1}{6} p^3 q) - \ldots$$

wo die Konstante der Integration verschwindet, wenn der Bogen vom Scheitel der kleinen Axe gerechnet werden soll. Ordnet man diesen Ausdruck nach u, und setzt

$\frac{1}{2^2} = A, \frac{1.3}{2^2.4^2} = \frac{1.3}{4^2} A = B,$

$\frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} = \frac{3.5}{6^2} B = C, \frac{5.7}{8^2} C = D$ u. s. f.

so erhält man

$$s = a\,[u(1 - Ae^2 - Be^4 - Ce^6 - De^8 - \ldots)$$
$$+ pq(Ae^2 + Be^4 + Ce^6 + \ldots)$$
$$+ \tfrac{2}{3} p^3 q (Be^4 + Ce^6 + \ldots) + \frac{2.4}{3.5} p^5 q (Ce^6 + \ldots)$$
$$+ \ldots] \qquad 514)$$

Für $u = \frac{1}{2}\pi$, wodurch $q = 0$ wird, folgt die Länge eines elliptischen Quadranten, oder

$$Q = \tfrac{1}{2} a \pi (1 - Ae^2 - Be^4 - Ce^6 - De^8 - \ldots)$$

371. In der Hyperbel hat man nach 511)

$ds = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$: man setze $x = a \sec u$, so ist

$x^2 - a^2 = a^2 tg^2 u$, und $ds = a\,sec\,u\,du\sqrt{(e^2 sec^2 u - 1)}$,

d. i. $ds = ae\,du\,sec^2 u \sqrt{(1 - \frac{cos^2 u}{e^2})}$.

Durch die Entwickelung der Wurzelgröße in eine Reihe folgt: $ds = ae\,du\,sec^2 u$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{a\,du}{e} - \frac{1}{2.4}\frac{a\,du\,cos^2 u}{e^3} - \frac{1.3}{2.4.6.}\frac{a\,du\,cos^3 u}{e^5} - \ldots$$

das Integral des ersten Gliedes ist $ae\,tg\,u$ nach 306), und das Integral des zweiten Gliedes $\frac{au}{2e}$: die Integrale der übrigen Glieder ergeben sich nach der Formel

$$\int du q^n = \tfrac{1}{n} q^{n-1} p + \frac{n-1}{n} \int du q^{n-2}$$

welche aus 377) für $m = o$ folgt. Hiernach ist

$$s = ae\,tg\,u - \tfrac{1}{2}\frac{au}{e} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{a}{e^3}(\tfrac{1}{2} pq + \tfrac{1}{2} u)$$

$$-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{a}{e^5}(\tfrac{1}{4} pq^3 + \frac{1.3}{2.4} pq + \frac{1.3}{2.4} u) - \ldots \quad 515)$$

372. Für den Kreis ist nach 510) $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

$= a\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ woraus man mit Rücksicht auf 23)

$$ds = dx\,(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{1.3x^4}{2.4a^4} + \frac{1.3.5x^6}{2.4.6a^6} + \ldots)$$

erhält, und dieses integrirt gibt

$$s = x + \frac{x^3}{2.3a^2} + \frac{1.3x^5}{2.4.5a^4} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7a^6} + \ldots \quad 516)$$

wo keine Konstante hinzugefügt wird, weil s mit x zugleich verschwindet.

Da der dritte Theil des Kreisquadranten den Bruch $\frac{1}{2}a$ zum Sinus hat, so gibt diese Reihe wenn man $a = 1$, und $x = \frac{1}{2}$ macht

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots \quad 517)$$

woraus sich π leicht berechnen läßt. S. 3. VI. 442.

373. Führt man die Formel 512) in die Ausdrücke 481), 482), 486), 487), 500) u. d. f. ein, so werden sie einfacher, man erhält so:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad 518)$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds} \qquad 519)$$

$$\text{die Tangente} = \frac{y\,ds}{dy} \qquad 520)$$

$$\text{die Normale} = \frac{y\,ds}{dx} \qquad 521)$$

$$\text{den Krümmungshalbmesser } R = \frac{ds^3}{d^2y\,dx - dy\,d^2x} \qquad 522)$$

$$\text{oder wenn } dx \text{ konstant ist, } R = \frac{ds^3}{d^2y\,dx} \qquad 523)$$

$$\text{und wenn man den Werth } d^2y\,dx - dy\,d^2x = \frac{ds^3}{R} \qquad 524)$$

aus 522) in die Gleichungen σ) τ) (365) substituirt, so folgen für die Lage des Krümmungsmittelpunktes die

$$\text{Gleichungen } g = x - \frac{R\,dy}{ds}, \quad h = y + \frac{R\,dx}{ds} \qquad 525)$$

374. Diese Ausdrücke zeigen, daß für jeden anderen Werth von x ein anderer Krümmungskreis gefunden wird, weil der Ausdruck sowohl für den Krümmungshalbmesser R, als auch für die Koordinaten g, h des Mittelpunktes seinen Werth mit x ändert, es bilden also diese zu verschiedenen Werthen von x gehörigen Mittelpunkte der Krümmungskreise selber wieder eine Kurve, welche man die Mittelpunktskurve oder Evolute nennt, und deren Gleichung man erhält, wenn man mittelst der gegebenen Gleichung der Kurve, aus den Gleichungen 525) die Größe x und y eliminirt.

Für die Ellipse hat man 508)

$ds = dx\sqrt{\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)}{a^2y}} = \frac{dx.k}{a^2y}$, wenn man zur Abkürzung $k = \sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)}$ setzt: ferner ist 509)

$R = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = -\frac{k^3}{a^4b^4}$, daher wird aus 525)

$g = x - \frac{k^2x}{a^4b^2} = \frac{x(a^4b^2 - k^2)}{a^4b^2} = \frac{x(a^4b^2 - a^4y^2 - b^4x^2)}{a^4b^2}$

$= \frac{x^3(a^2-b^2)}{a^4}$, und eben so

$h = y - \frac{k^2y}{a^2b^4} = \frac{y^3(b^2 - a^2)}{b^4}$: daraus folgt

$h = \frac{(b^2-a^2)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{b\quad a^3}$, oder

$h^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} = \frac{(a^2-x^2)(b^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}{a^2}$, mithin ist wegen

$x^2 = \frac{g^{\frac{2}{3}}a^2}{(b^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$ die Gleichung für die Evolute einer Ellipse

$h^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + g^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$. Für $g = o$ wird 526)

$h = \pm\frac{a^2-b^2}{b}$, hingegen für $h = o$, wird $g = \pm\frac{a^2-b^2}{a}$,

es liegt also diese Kurve innerhalb eines Parallelograms, dessen Diagonalen mit den Hauptaxen der Ellipse zusammenfallen und beziehungsweise $2\frac{(a^2-b^2)}{a}$ und $2\frac{(a^2-b^2)}{b}$ sind. Setzt man $b\sqrt{-1}$ an die Stelle von b und $-a$ statt a, so erhält man hieraus die Gleichung für die Evolute der Hyperbel

$a^{\frac{2}{3}}g^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}h^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$ 527)

Führt man aber in die Gleichung 526) den Parameter

ein, und setzt, weil die Abscissen vom Scheitel gezählt werden sollen a — g statt g, und macht nach Entwickelung der Binome a unendlich, so erhält man für die Evolute der Parabel die Gleichung

$$h^2 (\tfrac{1}{2}p)^{\frac{1}{3}} = \frac{2g-p}{3}, \text{ und hieraus folgt}$$

$$h^2 = \frac{16}{27p}(g-\tfrac{1}{2}p)^3 \qquad 528)$$

Man nennt die hiedurch vorgestellte Kurve die Neil'sche Parabel.

375. Da g und h die veränderlichen Koordinaten der Evolute vorstellen, so ist der Formel 480) gemäß $\frac{dh}{dg} = tg\,\alpha$, wenn α den Winkel bedeutet, unter welchem die Tangente eines ihrer Punkte die Abscissenaxe schneidet: es ist aber aus 525)

$$dh = d(y + \frac{R dx}{ds}) = dy + \frac{dR dx}{ds} + \frac{R}{ds^2}(ds.\,d^2x - dx\,d^2s)$$

ferner ist $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, und $d^2s = \frac{dx\,d^2x + dy.d^2y}{ds}$, hiernach wird

$$dh = dy + \frac{dR\,dx}{ds} + \frac{R dy}{ds^2}(dy.\,d^2x - dx.\,d^2y),$$

und mit Rücksicht auf 524)

$dh = \frac{dR dx}{ds}\lambda)$, vertauscht man in 523) h, y, dx mit g, x und $-dy$, so erhält man

$dg = -\frac{dR.\,dy}{ds}\mu)$, woraus sofort folgt

$\frac{dh}{dg} = -\frac{dx}{dy}\nu)$ Sei nun BM (Fig. 16) eine Kurve gegeben durch eine Gleichung zwischen ihren Koordinaten AP = x, PM = y: die Gerade MT berühre dieselbe im

Punkte M, dessen Normale MN und Krümmungsmittelpunkt m wäre, man ziehe mp auf AN senkrecht, so ist mp = h die Ordinate der Mittelpunktskurve, also Ap = g.

Nun ist $tg\,MTP = \frac{dy}{dx}$, also $cot\,MTP = \frac{dx}{dy} = cot\,PMN = tg\,MNP$: hiedurch gibt die Gleichung ν) $tg\,MNP = tg\,\alpha$, oder $MNP = \alpha$; es berührt daher die Normale MN die Mittelpunktskurve in m so, daß das zwischen diesem Punkte und der Kurve BM liegende Stück der Tangente dem Krümmungshalbmesser in M gleich ist. Erhebt man die Gleichungen λ) und μ) zum Quadrat, so gibt ihre Summe $\sqrt{(dh^2 + dg^2)} = dR$, woraus durch die Integration folgt: Bogen bm + const. = R = Mm, in dem Punkte b der als Krümmungsmittelpunkt dem Punkte B entspricht fängt der Bogen bm an, also gilt die Gleichung o + const. = R = Bb, mithin ist Bogen bm + Bb = Mm. Wenn man daher das Ende B eines um die Evolute gelegten Fadens, so abwickelt, daß das von der Kurve getrennte Stück des Fadens immer Tangente der Evolute ist, so beschreibt der Punkt B während dieser Abwicklung die gegebene Kurve BM, welcher Eigenschaft halber diese auch die Evolvente genannt wird.

376. Eine Kurve quadriren heißt, eine entweder durch die ganze Kurve oder durch einen Bogen derselben und durch gerade Linien begrenzte Ebene durch Zahlen ausdrücken, deren Einheit irgend ein bekanntes Flächenmaß (Quadratzoll, Quadratfuß, u. s. f.) beträgt. Sei $y = fx$ die Gleichung einer Kurve AM (Fig. 15) zwischen ihren rechtwinkligen Koordinaten AP = x, PM = y, und der von der Abscissenare AP, dem Bogen AM und von der Ordinate PM eingeschlossene Raum, der offenbar eine Funktion von x ist, werde durch Fx ausgedrückt.

Geht $AP = x$ in $AP' = x + k$ über, so entsteht hiedurch aus dem Flächenraume $AMP = Fx$ der Flächenraum $AM'P' = F(x+k)$; sonach ist beider Unterschied, oder $PMM'P' = F(x+k) - Fx$. Wenn nun bei zunehmenden Abscissen die Ordinaten wachsen, so ist dieser Flächenraum $PMM'P'$ größer als das Rechteck aus PP' und PM, hingegen kleiner als das Rechteck aus PP' und $P'M'$ d. i.

$$F(x+k) - Fx > k.fx$$
$$< k.f(x+k)$$

nehmen aber die Ordinaten ab, so ist umgekehrt $PMM'P' < PP'.PM$ und zugleich $PMM'P' > PP'.P'M'$; folglich ist derselbe Flächenraum immer zwischen den Gränzen kfx, und $kf(x+k)$ eingeschlossen: man wähle $k' < k$ so, daß derselbe Flächenraum

$$F(x+k) - Fx = kf(x+k')$$

sei, so hat man mittelst des Tellor'schen Satzes, wenn man beide Theile der Gleichung mit k dividirt hat

$$fx + k'f_1x + \tfrac{1}{2}k'^2f_2x + \ldots = F_1x + \tfrac{1}{2}kF_2x + \tfrac{1}{3}!\,k^2F_3x..$$

für jeden Werth von k, setzt man hierin $k = 0$, wodurch auch $k' = 0$ wird, so erhält man

$$F_1x = fx, \text{ oder } d\frac{Fx}{dx} = fx, \text{ und hieraus}$$

$$Fx = \int fx.dx = \int ydx. \qquad 529)$$

Bei schiefwinkligen Koordinaten ist diese Formel noch in den Sinus des Koordinatenwinkels zu multipliziren.

377. Die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ gibt

$$\int ydx = \int dx.\, p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{px^3} + C$$

wenn nun mit der Abscisse $x = 0$, die Fläche verschwinden soll, so ist die Konstante der Integration gleich Null, und daher die gesuchte Fläche $APM = \frac{2}{3}xy$ 530)

Die Gleichung der Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$

gibt $\int y dx = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Vergleicht man dieses Integrale mit der Formel 360), so ergibt sich $a = a^2$, $b = -1$, und man erhält

$$\int y dx = \frac{b}{2a} (x \sqrt{(a^2 - x^2)} + a^2 \text{ arc. } sin \frac{x}{a}) + C, \quad 531)$$

wo die Konstante wieder verschwindet, wenn die Fläche zugleich mit x Null ist.

Setzt man hier $x = a$, so wird der 4te Theil der elliptischen Fläche

$$= \frac{b}{2a} . a^2 \text{ arc. } sin\ 1 = \frac{ab\pi}{4}$$

daher ist die Fläche der ganzen Ellipse

$$F = ab\pi \quad 532)$$

Setzt man im letzteren Ausdrucke $a = b$, so erhält man für die Fläche des Kreises $a^2 \pi$.

Bei der Hyperbel ist $\int y dx = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{(x^2 - a^2)}$, also gibt die Formel 359)

$$\int y dx = \frac{bx}{2a} \sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{ab}{2} \lambda [(x + \sqrt{(x^2 - a^2)}] + C$$

wird nun das Integral vom Scheitel an, wo $x = a$ ist gerechnet, so wird für diesen Werth der Abscisse die Fläche verschwinden, daher $o = -\frac{1}{2} ab \lambda a + C$ woraus folgt $C = \frac{1}{2} ab \lambda a$, und hiedurch wird das vollständige Integral

$$\int y dx = \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} ab \lambda \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a} \quad 533)$$

nun ist $\frac{1}{2} xy$ der Flächeninhalt des Dreieckes CPM (Fig. 14) und $\int y dx = APM$, daher ist die Fläche

$$CAM = \frac{1}{2} ab \lambda \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a} \quad 534)$$

Heißt der Asymptotenwinkel φ, und zieht man AD zu CR parallel, so ist 498) sowohl AD × CD als auch CN × MN gleich $\frac{1}{4}(a^2 + b^2) = k^2$, daher auch $\frac{1}{2}$ AD × CD $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ CN × MN $\sin\varphi$, oder Dreieck ACD = Dreieck CMN (μ): nun gibt die Formel 498)

$$tdu \sin\varphi = \frac{k^2\, du}{u} \sin\varphi, \text{ also}$$

$$\int tdu \sin\varphi = k^2 \sin\varphi . \lambda u + C.$$

Soll nun die Fläche von der Ordinate AD an gerechnet werden, so muß sie für $u = CD = k$ verschwinden, und man hat zur Bestimmung von C die Gleichung $C + k^2 \sin\varphi . \lambda k = 0$, dieß gibt $C = -k^2 \sin\varphi . \lambda k$,

und die Fläche $ADMN = k^2 \sin\varphi . \lambda \frac{u}{k}$. 535)

Wenn man aber von der Fläche CAMN die Gleichung $\mu)$ abzieht, so bleibt ADMN = Sektor CAM, nimmt man nun k zur Einheit an, so folgt aus 535) für die gleichseitige Hyperbel Sektor CAM $= \lambda u$ 536)

oder die Zahlen, welche die hyperbolischen Sektoren CAM ausdrücken, sind Logarithmen der mit denselben zusammengehörigen Linien CN = u. Um dieser Eigenschaft willen nennt man die natürlichen Logarithmen auch **hyperbolische Logarithmen.**

Tangenten, Krümmungshalbmesser, Rektifikation und Quadratur bei Polarkoordinaten.

378. Sei α der Neigungswinkel des Radiusvektor r gegen die Axe der x, so ist für rechtwinklige Koordinaten

$x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, folglich $\lambda)$

$dx = dr . \cos\alpha - r dx . \sin\alpha$ $\mu)$

$dy = dr . \sin\alpha + r d\alpha \cos\alpha$ $\nu)$ also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dr\sin\alpha + r.d\alpha.\cos\alpha}{dr\cos\alpha - rd\alpha.\sin\alpha} \quad \rho)$$

Es sei β der Winkel TMA (Fig. 16) unter welchem die Berührende dem Radiusvektor AM begegnet. Da in dem Falle der Figur, dieser Winkel der Unterschied der Winkel PMT, PMA ist, welche die Ordinate mit der Berührenden und dem Radiusvektor bildet, so hat man, weil $\frac{dx}{dy}$ die Tangente des erstern, und $\frac{x}{y}$ jene des letztern ist,

$$tg\,\beta = \frac{\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}.\frac{dx}{dy}} = \frac{ydx - xdy}{ydy + xdx}.$$ Nun ist

$$ydx - xdy = -x^2 d\frac{y}{x} = -r^2\cos^2\alpha.\, d\,tg\,\alpha = -r^2 d\alpha$$

und $ydy + xdx = \frac{1}{2}d(x^2+y^2) = \frac{1}{2}d.r^2 = rdr$, also

$$tg\,\beta = -\frac{rd\alpha}{dr} \quad \sigma)$$

Hier ist $tg\,\beta$ negativ, weil sobald dx und dy einerlei Zeichen haben d. h. x und y zugleich wachsen oder abnehmen, r bei dem Wachsen von α abnimmt, oder umgekehrt.

379. Stellt s einen im Punkte x, y oder r, α sich endigenden Bogen der Kurve vor, so ist $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$; es ist aber wegen $\mu)$ $\nu)$

$dx^2 = dr^2\cos^2\alpha - 2\,rdr.\sin\alpha\cos\alpha + r^2 d\alpha^2.\sin^2\alpha$

$dy^2 = dr^2\sin^2\alpha + 2\,rdr\sin\alpha.\cos\alpha + r^2 d\alpha^2.\cos^2\alpha$

folglich $ds = \sqrt{(dr^2 + r^2 d\alpha^2)}$, und hieraus wird 537)

$$s = \int dr.\sqrt{(1+\frac{r^2 d\alpha^2}{dr^2})} = \int d\alpha\sqrt{(\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2)} \quad 538)$$

je nachdem man $d\alpha$ durch r und dr, oder r und dr durch α und $d\alpha$ ausgedrückt hat.

380. Zieht man durch den Pol A die auf AM senkrechte Gerade RT′, und verlängert sie beiderseits, bis sie der Tangente MT′ und der auf ihr senkrechten Normale MR begegnet, so heißt das eine Stück AT′ die Subtangente das andere AR die Subnormale.

Man hat also bei Polarkoordinaten

$$\text{die Subtangente} = r\,tg\,\beta = -\frac{r^2\,d\alpha}{dr} \qquad 539)$$

und, weil die Winkel AMT′, AMR sich zu einem rechten ergänzen

$$\text{die Subnormale} = r\,cot\,\beta = -\frac{dr}{d\alpha} \qquad 540)$$

ferner folgt aus den zwei rechtwinkligen Dreiecken AMT′, MAR

$$\text{die Tangente} = \sqrt{(r^2 + \frac{r^4\,d\alpha^2}{dr^2})}$$

$$= \frac{r}{dr}\sqrt{(dr^2 + r^2\,d\alpha^2)} = \frac{r\,ds}{dr} \qquad 541)$$

$$\text{die Normale} = \frac{1}{d\alpha}\sqrt{(dr^2 + r^2\,d\alpha^2)} = \frac{ds}{d\alpha} \qquad 542)$$

381. Zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers gibt die Formel 522)

$$R = \frac{ds^3}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$$

wenn man aber in den Gleichungen μ) ν) (378) $d\alpha$ als unveränderlich betrachtet, wird

$d^2x = d^2r.\,cos\,\alpha - 2\,dr\,d\alpha\,sin\,\alpha - r\,d\alpha^2\,cos\,\alpha$ und

$d^2y = d^2r.\,sin\,\alpha + 2\,dr\,d\alpha\,cos\,\alpha - r\,d\alpha^2\,sin\,\alpha$

substituirt man diese Werthe nebst jenen, in der obigen Formel, so erhält man

$$R = \frac{(dr^2 + r^2\,d\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{r\,d\alpha\,d^2r - r^2\,d\alpha^2 - 2\,dr^2\,d\alpha}: \text{ man erhält den-} \qquad 543)$$

selben Ausdruck auf einem kürzeren Wege, wenn man die Abscissenaxe auf der Richtung des Radiusvektor senkrecht wählt, wodurch $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, also
$\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$ wird, mithin

$$dx = -r d\alpha, \quad d^2x = -2\,dr\,d\alpha$$
$$dy = dr, \quad d^2y = d^2r - r d\alpha^2.$$

382. Sind x, y, x', y', die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte M, M', so hat man die Fläche des Dreieckes

$$AP'M' = \tfrac{1}{2}x'y'$$

$APM = \frac{1}{2}xy$, und wenn man M mit M' verbindet, die Fläche des Trapezes

$$PMM'P' = \tfrac{1}{2}(x'-x)(y'+y)$$

es ist aber

$$MOM' = PMM'P' - POM'P'$$
$$AOM = AMP - AOP$$

also ihre Summe

$$AMM' = PMM'P' - (AOP + POM'P') + AMP$$
$$= PMM'P' - AM'P' + AMP$$

oder wenn man substituiret, wird
Fläche $MAM' = \frac{1}{2}(x'y - y'x)$. Ist aber 544)
$x' = x + dx$, $y' = y + dy$, so wird
Fläche $MAM' = \frac{1}{2}(y\,dx - x\,dy)$, und wenn man hier die vorhergehenden Werthe aus $\lambda)$ $\mu)$ und $\nu)$ setzt
Fläche $MAM' = \frac{1}{2}r^2\,d\alpha$, woraus für die ganze 545)
zwischen dem Bogen der Kurve und dem Radiusvektor enthaltene Fläche, der Ausdruck $\frac{1}{2}\int r^2\,d\alpha$ folgt. Bei der Parabel hat man nach 478)

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos v} = \frac{\frac{1}{4}p}{\cos^2\frac{1}{2}v} \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2}r^2\,dv = \frac{\frac{1}{8}p^2\,dv}{\cos^4\frac{1}{2}v} = \tfrac{1}{8}p^2\,dv\sec^2\tfrac{1}{2}v(1+tg^2\tfrac{1}{2}v)$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach 306), und berücksichtiget, daß

$\int dv \sec^2 \frac{1}{2}v \, tg^2 \frac{1}{2}v = \frac{2}{3} tg^3 \frac{1}{2}v$ sei, so erhält man den parabolischen Sektor

$$\frac{1}{2}\int r^2 \, dv = \frac{1}{16} p^2 \, tg \frac{1}{2}v (1 + \frac{1}{3} tg^2 \frac{1}{2}v) \qquad 546)$$

383. Die Infinitesimalrechnung sieht jede Kurve als ein Unendlichvieleck an, dessen jede der unendlich kleinen Seiten das Differential des Bogens vorstellt, mithin den Werth ds erhält: und da sie zugleich Hypotenuse, eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen Katheten dx und dy sind, so hat man sogleich $ds^2 = dx^2 + dy^2$ wie oben.

Ist in (Fig. 15) $PM = y$, $P'M' = y + dy$, $PP' = dx$, so hat man die Fläche des Trapezes $PMM'P' = \frac{1}{2}(y + y + dy)\,dx = y\,dx + \frac{1}{2}\,dy.\,dx$, oder das Differentiale der Fläche $= y\,dx$, weil $dy.\,dx$ gegen $y\,dx$ wegen (113) außer Acht kömmt.

XII. Besondere Punkte krummer Linien.

384. Wenn die Gerade, welche eine krumme Linie in einem bestimmten Punkte berührt, in eben diesem Punkte durch die Kurve so hindurchgeht, daß die demselben zunächst liegenden Punkte der Kurve auf entgegengesetzten Seiten der Berührenden sich befinden, so heißt dieser Berührungspunkt ein **Wendungspunkt** der Kurve. Ein solcher Punkt ist N in der Kurve KNM. (Fig. 17)

Ein **Rückkehrpunkt** oder eine **Spitze** heißt jener Punkt einer Kurve, in welchem zwei gegeneinander nicht konkave Aeste einer Kurve sich endigen. Diese Aeste kehren also in der Gegend ihres Vereinigungspunktes ihre konkaven Seiten gegen einander, in welchem Falle eine **Spitze der ersten Art** Statt findet, wie im Punkte C (Fig. 18) oder es ist die konvexe Seite des einen Astes gegen die konkave des anderen Astes ge-

wendet, wodurch eine Spitze der zweiten Art, die auch ein Schnabel heißt, wie C' gebildet wird.

Man nennet einen vielfachen Punkt einer Kurve denjenigen, durch welchen mehrere Aeste derselben hindurchgehen, sie mögen sich daselbst schneiden oder berühren. Der Punkt M z. B. der Kurve AMBMN (Fig. 19) ist ihr doppelter Punkt.

385. Sei $y = fx$ die Gleichung einer Kurve AM (Fig. 15) zwischen ihren rechtwinkligen Koordinaten $AP = x$, $PM = y$, man führe durch die Punkte der Abscissenaxe P', P'', die um die Größe $PP' = P'P'' = k$ von einander abstehen, die Ordinaten P'M', P''M'', hingegen die Geraden ME, M'E' darauf senkrecht; so ist

$$P'M' = f(x+k) = fx + kf_1x + \tfrac{1}{2}k^2 f_2x + \ldots$$
$$P''M'' = f(x+2k) = fx + 2kf_1x + \tfrac{1}{2}!4k^2 f_2x + \ldots$$

also auch, wenn man diese Ausdrücke von einander abzieht,

$$\left.\begin{aligned} M'E &= kf_1x + \tfrac{1}{2}k^2 f_2x + \tfrac{1}{3}!k^3 f_3x + \ldots \\ M''E' &= kf_1x + \tfrac{2}{2}k^2 f_2x + \tfrac{1}{3}!7k^3 f_3x + \ldots \end{aligned}\right\} \lambda)$$

Zieht man die Sehne MM', bis sie der verlängerten P''M'' in B' begegnet, so ist

$$B'M'' = M'E - M''E = -(k^2 f_2x + k^3 f_3x + \ldots)$$

Denkt man sich zuletzt k im Moment des Verschwindens und $= dx$, so erhält man, die höheren Potenzen von dx im Geiste der Differentialrechnung außer Acht lassend, $M'E = dy$, und $B'M'' = d^2y$. Nimmt man aber die Größe k so klein daß in den Ausdrücken $\lambda)$ das erste Glied kf_1x größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder, so werden die Ordinaten wachsen oder abnehmen, je nachdem f_1x positiv oder negativ ist: woraus man beurheilen kann, ob ein Zweig einer Kurve sich immer mehr und mehr von der Abscissenlinie entfernt, oder aber ihr sich nähert. Aus demselben Grunde ist B'M'' positiv oder

negativ d. h. die Kurve AM'' muß gegen die Abscissenaxe hohl oder erhaben werden, je nachdem f_2x negativ oder positiv ausfällt: in der That ist B'M'' in Fig. 15, wo die Kurve AM'' ihre hohle Seite der Abscissenaxe zuwendet positiv, weil $M'E > M''E'$, hingegen in Fig. 20 negativ. Ist endlich für irgend einen Werth von x die Größe $f_1x = 0$, so wird die Ordinate y der Kurve in diesem Punkte, einen größten oder kleinsten Werth haben, je nachdem f_2x negativ oder positiv ist, das heißt, je nachdem die Kurve gegen die Abscissenaxe hohl oder erhaben ist. Da aber f_1x den Werth $\frac{dy}{dx}$ bedeutet, und letzterer die Tangente des Winkels vorstellt, den die Berührungslinie mit der Abscissenaxe einschließt, so muß im Punkte der größten oder kleinsten Ordinate, die Berührende mit der Abscissenaxe parallel laufen.

386. Da bei einem Wendungspunkte (384) der hohle Ast der Kurve sich an den erhabenen anschließt, so muß der Werth von f_2x in diesem Punkte sein Vorzeichen ändern; setzt man also $f_1x = 0$, und ist z. B. f_2x negativ für $x = \alpha$, und positiv für $x = \beta$, so folgt hieraus, daß die Kurve in dem durch die Abscisse α bestimmten Punkte ihre hohle Seite und in dem durch die Abscisse β bestimmten Punkte ihre erhabene Seite der Abscissenaxe zukehrt, daß daher zwischen α und β eine Abscisse sich angeben lassen muß, durch welche die Lage eines Wendungspunktes bestimmt ist. Sei z. B.

$y = a + b(x - c)^3$ die Gleichung einer Kurve, man erhält durch die Differenzirung

$\frac{dy}{dx} = 3b(x - c)^2$, also $\frac{dy}{dx} = 0$ gibt $x = c$, ferner ist

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6b(x-c)$ positiv oder negativ, je nachdem $x > c$, oder $x < c$ genommen wird, daher hat die Kurve im Punkte, dessen Abscisse $x = c$ ist, einen Wendungspunkt.

387. Zwei Aeste einer Kurve können sich in einem Punkte nicht endigen ohne daselbst eine gemeinschaftliche Tangente zu haben: führt man also die Axe der y dieser Tangente parallel, so wird im Fall einer Spitze (384) ihre Ordinate den kleinsten oder größten Werth haben, je nachdem dieselbe gegen die Abscissenlinie gekehrt, wie in C, oder von dieser abgewendet ist, wie in D (Fig. 18): geschieht es für einen Werth $x = a$, so muß für diesen Punkt $\frac{dy}{dx}$ unendlich, also $\frac{dx}{dy} = 0$ sein, weil die gemeinschaftliche Tangente auf der Abscissenaxe senkrecht steht: endlich wird der Werth $\frac{d^2y}{dx^2}$ sein Vorzeichen nicht ändern, man mag $x > a$, oder $x < a$ nehmen. Z. B. Die Kurve deren Gleichung $y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$ hat im Punkte $x = a$, $y = b$ eine Spitze: denn die Gleichung gibt für $x = a$, ein kleinstes y, ferner $\frac{dy}{dx} = \frac{2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}}$, also $\frac{dx}{dy} = 0$ für $x = a$, endlich ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2c}{9(x-a)^{\frac{4}{3}}}$, also für $x > a$, wie für $x < a$ negativ, wenn c positiv ist.

388. Erhält y in einer Gleichung $y = fx$ für irgend einen Werth $x = b$, bloß einen Werth, hingegen der Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ mehrere Werthe, so hat die zugehörige Kurve im Punkte $x = b$, einen vielfachen Punkt. Sei z. B. $y = a + (x-b)\sqrt{x}$, so ergibt sich für $x = b$, $y = a$, für jeden andern Werth

von x aber findet man zweierlei Werthe für y; es schneiden sich sonach die zwei Aeste der Kurve im genannten Punkte: sucht man nun den Werth für $\frac{dy}{dx}$, so erhält man $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} + \frac{x-b}{2\sqrt{x}}$, also für $x = b \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x}$; mithin ist jener Punkt ein doppelter oder zweifacher Punkt der Kurve. (S. V. II. 158.)

XIII. Linien höherer Ordnungen.

389. Die Neil'sche Parabel oder die Kurve sämmtlicher Krümmungsmittelpunkte einer Parabel, erhält, wenn man die Axe der Parabel zur Abscissenaxe und den Punkt C (Fig. 13) zum Ursprunge wählt, die Gleichung $u^2 = \frac{1}{27} \cdot \frac{t'^6}{p}$: nimmt man aber die Axe der 547)
Parabel zur Axe der y, und die durch die Spitze als Anfangspunkt gezogene Senkrechte zur Abscissenlinie, setzt $\frac{2}{16} p = a$, so wird ihre Gleichung $y^2 = ax^2$. 548)
In dieser Gestalt zeigt die Gleichung, daß es sowohl für positive als negative Abscissen Punkte der Kurve gibt, welche sich daher in zwei unendlichen Aesten erstreckt. Da $\frac{dx}{dy} = \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{2a^{\frac{1}{3}}}$ für $x = 0$, null wird, so steht die Tangente im Anfangspunkt der Koordinaten auf der Abscissenaxe senkrecht fällt also mit der Ordinatenaxe zusammen. Hieraus folgt die Subtangente $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{3}{2}x$, die Fläche $\int y\,dx = a^{\frac{1}{3}} \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{ax^5}$, und der Bogen 549)
$s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(4a^{\frac{2}{3}} + 9x^{\frac{2}{3}})}$:

setzt man $x^{\frac{1}{3}} = u$, so wird $dx = 3u^2 du$, also

$$s = \int u\,du \sqrt{(4a^{\frac{1}{3}} + 9u^2)} = \tfrac{1}{27}(4a^{\frac{1}{3}} + 9x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad 550)$$

sonach ist diese Kurve algebraisch zu quadriren und zu rektifiziren.

390. Beschreibt man über AB (Fig. 20) als Durchmesser einen Kreis, errichtet in B eine Tangente, und zieht an beliebige Punkte derselben von A aus die Sekanten AN, AN′ u. s. f., schneidet endlich auf jeder derselben das Stück AM = CN, AM′ = C′N′ u. s. f. so heißt die so entstehende Kurve AMM′ wegen ihrer Aehnlichkeit mit einem Epheublatte die Cissoide des Diokles. Ist AP = x, PM = y, und AB = 2a, so hat man $AM^2 = x^2 + y^2$, $BN = \frac{2ay}{x}$, und

$AN^2 = \frac{4a^2y^2}{x^2} + 4a^2$, also wegen $BN^2 = AN \times CN$ wird $2ay^2 = x^2 + y^2x$, welches die Gleichung 551) der Cissoide ist.

Hieraus folgt, daß die Axe der x der Durchmesser dieser Kurve ist: daß für x = 2a, y unendlich wird, also BNN′ eine Asymptote der Kurve sei.

391. Die Gleichung 551) gibt so fort

$x\sqrt{x} = y\sqrt{(2a - x)}$, also

$x\sqrt{(2ax - x^2)} = y(2a - x)$: nun ist

$\sqrt{(2ax - x^2)} = PR$, und $2a - x = PB$, demnach wird $AP \times PR = PM \times PB$, oder $PM : AP = PR : PB$ μ) aber im Kreise ist $PR : PB = AP : PR$, sonach hat man $PM : AP = AP : PR = PR : PB$, d. i. PM, AP, PR, PB sind vier stetige Proportionalen.

Sei OD ein Halbmesser senkrecht auf AB, und es schneide die AN denselben in E, und eine an den Punkt M gezogene Gerade MB in F, so ist

AP: PM = AO: OE ν) und auch
PM: PB = OF: OB, daher entsteht durch die Multiplikation
AP: PB = OF: OE und wegen μ) wie PM: PR. Ist nun OG die mittlere Proportionale zwischen OF und OE, so ist OF: OG = OG: OE = PM: AP und wegen ν) wie OE: AO; daher sind OF, OG, OE, AO vier stetige Proportionalen. Wenn also zwischen zwei Geraden AO und OF zwei mittlere Proportionalen zu finden sind, so beschreibe man mit der größeren AO einen Kreis, zeichne die zugehörige Cissoide, und trage die andere OF auf den senkrechten Halbmesser OD, ziehe BF bis sie die Cissoide in M, ferner AM bis sie den Halbmesser in E schneidet, so ist OE die größere der gesuchten Geraden.

392. Die Subtangente der Cissoide wird $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{x(2a-x)}{3a-x}$; der Krümmungshalbmesser hingegen erhält den Werth $\frac{a x^{\frac{1}{2}} (8a-3x)^{\frac{3}{2}}}{3(2a-x^2)}$,

endlich die Fläche $\int y\,dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ ergibt sich aus der Formel 373)

$$\int y\,dx = -\tfrac{1}{2}(x+3a)\sqrt{(2ax-x^2)} + \tfrac{3}{2}a^2 \text{arc. } sin\ v. \frac{x}{a} + C,$$

da aber mit x die Fläche verschwindet, so ist $0 = \frac{3}{2}a^2$ arc. $sin\ v\ 0 + C$, mithin $C = 0$, und daher vollständig

$$\int y\,dx = -\tfrac{1}{2}(x+3a)\sqrt{(2ax-x^2)} + \tfrac{3}{2}a^2 \text{arc. } sin\ v. \frac{x}{a} \qquad 552)$$

Für $x = 2a$, folgt hieraus die zwischen der Kurve AM', ihrem Durchmesser AB und der Asymptote BN' eingeschlossene Fläche $\int y\,dx = \frac{3}{2}a^2\pi$ 553)

393. Sei ADB ein Kreis vom Durchmesser AB = a, (Fig. 22): man verlängere jede Sehne AC, AD beiderseits bis CM = CM′ = a, Dm = Dm′ = a u. s. f. wird, so heißt die Kurve, in welcher sämmtliche so bestimmten Punkte liegen, von ihrer herzförmigen Gestalt die Kardioide. Sei AM = r, und der Winkel BAM = v, so hat man in dem rechtwinkligen Dreieck ACB, AC = a cos v, also AM = r = a + a cos v die Polargleichung dieser 554) Kurve. Sei ferner die Abscisse AP = x, und die Ordinate PM = y, so ist $x = r\cos v$, und $r^2 = x^2 + y^2$, also auch wegen 554) $\sqrt{(x^2+y^2)} = a\left(1 + \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)$, oder wenn man diesen Ausdruck rational macht, und nach y ordnet, wird

$$y^4 - y^2(a^2 + 2ax - 2x^2) - 2ax^3 + x^4 = 0 \quad 555)$$

die Koordinatengleichung der Kardioide.

394. Aus der letzten Gleichung erhält man $y^2 = \frac{1}{2}a^2 + x(a - x) \pm \frac{1}{2}a\sqrt{a(a + 4x)}$, woraus folgt, daß y sowohl für x = 0, als auch für x = 2 a null wird, sonach ist die Abscissenare ABG ein Durchmesser der Kurve, welche er in den Punkten x = 0, und x = 2a schneidet. Ist $x = -\frac{1}{4}a$, so gibt die Gleichung $y = \pm\frac{1}{4}a\sqrt{3}$, als Werthe der größten Ordinaten, welche den negativen Abscissen zugehören, denn für größere negative x wird y imaginär: die Kurve ist sonach eine geschlossene krumme Linie. Für x = 0 erhält man aber y = ± a und y = 0. Differenzirt man nun die Gleichung 555), so erhält man

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2x^2y + 2y^3 - 2axy - a^2y}{2x^2 + 2xy^2 - 3ax^2 - ay^2} \quad 556)$$

Setzt man hier x = 0, ferner y = a und y = 0; so ergibt sich $\frac{dx}{dy} = 1$, und $\frac{dx}{dy} = \infty$ d. i. die Tangente des

Endpunktes der in A errichteten Ordinate schließt mit ihr einen Winkel von 45° ein, [während die Tangente des Punktes A auf derselben Ordinate senkrecht steht, sonach mit der Abscissenaxe übereinfällt: und da sich zu beiden Seiten derselben für negative Abscissen unter $\frac{1}{4}a$ Punkte der Kurve befinden, so ist A eine Spitze der Kardioide.

395. Zieht man zu irgend einer Sehne AC den Halbmesser OD parallel, nimmt auf seiner Verlängerung DE = OD, und beschreibt um E als Mittelpunkt mit dem Halbmesser DE einen Kreis, so hat man wegen den gleichen und parallelen Geraden CM, OE auch CO = ME, mithin geht der um E beschriebene Kreis durch den Punkt M; da ferner der Winkel MEF = COD = OCA = CAO, und COB als ein Winkel am Mittelpunkte dem doppelten Winkel an der Peripherie CAO gleich ist, so hat man auch DOB = COD = MEF, mithin sind ihre Nebenwinkel AOD und DEM, folglich auch die Bogen AD und DM einander gleich. Die Kardioide wird also von einem Punkte M der Peripherie eines Kreises DMF beschrieben, während dieser Kreis sich auf der Peripherie ADB eines andern ihm gleichen Kreises bewegt.

396. Wählt man außerhalb einer Geraden AB (Fig. 23) einen Punkt C, von dem man eine beliebige Anzahl gerader Linien CD, CE, CF ... zieht, und macht an denselben ihre jenseits der Geraden AB befindlichen Stücke DG, EH, FJ ... einander gleich, so heißt die durch die Endpunkte sämmtlicher Linien gezogene Kurve von ihrer muschelförmigen Gestalt die Konchoide des Nikomedes. Sei DG = a, CH = r, also CE = r − a, und auch CE = b sec v, daher r − a = b sec v, so ist r = a + b sec v die Polar- 557)

gleichung dieser Kurve. Bestimmt man auf gleiche Art Punkte diesseits der Geraden AB, indem man JF=EH'=DK=a abschneidet, so entsteht eine untere Konchoide, deren Gleichung $x = b \sec v - a$ ist.

Nimmt man die Gerade AB zur Abscissenaxe und in ihr den Punkt D zum Ursprung, so hat man für irgend einen Punkt L der Kurve $DL = x$, $LJ = y$, mithin $FL = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, und $DF = x - \sqrt{(a^2 - y^2)}$: nun ist

$$\left.\begin{matrix} CD \\ b \end{matrix}\right\} : \left\{ x - \sqrt{(a^2 - y^2)} \right\} = \left.\begin{matrix} JL \\ y \end{matrix}\right\} : \left\{ \sqrt{(a^2 - y^2)} \right\},$$

hiedurch entsteht die Gleichung

$$x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}, \quad 558)$$

wo für Punkte der unteren Konchoide y negativ zu nehmen ist. Ordnet man diese Gleichung nach y, so erhält man

$$y^4 + 2hy^3 + y^2(x^2 - a^2 + b^2) - 2a^2hy - a^2b^2 = 0 \quad 559)$$

die Koordinatengleichung der Konchoide, welche demnach eine Kurve der vierten Ordnung ist.

397. Diese Gleichung zeigt: a) daß sie wenigstens zwei reelle Wurzeln hat (160) eine positive und eine negative, hat sie aber vier reelle Wurzeln, so sind darunter drei negative und eine positive (161); es kann also die untere Konchoide von einer zur Ordinatenaxe parallelen Geraden wie Mm' in 3 Punkten geschnitten werden. b) Daß für $y = 0$, $x = \infty$ wird, d. i. es kann die Kurve nie der Abscissenlinie begegnen, die daher eine Asymptote beider Konchoiden ist, und da die Grenze welcher sich die Gleichung beim unendlichen Wachsen von x ohne Ende nähert $x^2y^2 = a^2b^2$ ist, woraus $xy = \pm ab$ die Gleichung einer auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel 498) folgt, so nähert sich die Konchoide immer mehr und mehr einer gleichseitigen Hyperbel, deren Halbaxe

$\sqrt{}$ ab ist. c) Setzt man aber in der Gleichung $-x$ statt x, so bleibt sie ungeändert, mithin sind die Aeste beider Kurven rücksichtlich der Ordinatenaxe gleich und ähnlich.

Errichtet man auf dem Radiusvektor CJ die CN senkrecht bis sie der Normale NJ begegnet, so ist nach 540) die Subnormale

$$CN = \frac{dr}{dv} = b \sec v \, tg \, v = (r \mp a) \, tg \, v = CF . \, tg \, GCJ$$

den auf demselben Radiusvektor liegenden Punkten J, J' gemeinschaftlich: verbindet man aber F mit N, so ist auch CN = CF tg CFN; daher sind die Winkel GCJ, CFN einander gleich, oder die FN parallel zu GC. Man kann also zu einem beliebigen Punkt J oder J' einer Konchoide eine Tangente führen, wenn man den Radiusvektor CJ zieht, welcher die Gerade AB in F schneidet, und durch F die FN zur GC parallel führt, bis sie der auf dem Radiusvektor in C errichteten Senkrechten CN begegnet, so ist beziehungsweise die Verbindungslinie JN' J'N eine Normale, und die auf ihr Senkrechte JT, J'T' die geforderte Tangente.

398. Den Ausdruck 558) kann man auch so schreiben: $x = (\frac{b}{y} + 1)\sqrt{(a^2 - y^2)}$, woraus durch die Differenzirung folgt:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 b + y^3}{y^2 \sqrt{(a^2 - y^2)}}, \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 \sqrt{(a^2 - y^2)}}{a^2 b + y^3} \quad 560)$$

als Tangente des Winkels, den die Tangente der Kurve mit der Abscissenaxe einschließt (351). Nun gibt die Gleichung 559) für $x = o$ die Werthe $y = +a, y = -a$, und die doppelte Wurzel $y = -b$: für $y = \pm a$ erhält man aus 560), $\frac{dy}{dx} = o$, mithin sind die Tangenten der

Punkte G, K der Abscissenaxe parallel: setzt man aber $y = -b$, so ergibt sich $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2b-b^3}$, welcher Ausdruck reel wird, so oft als $a > b$ ist, er liefert zwei gleiche entgegengesetzte Werthe für den Neigungswinkel der Tangente des Punktes C gegen die Abscissenaxe, daher dieser Punkt ein doppelter Punkt der unteren Konchoide ist, welche in ihm einen Knoten CH'K bildet. Ist $a = b$, so wird $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{\sqrt{(a^2-b^2)}} = \infty$, und die Tangente des Punktes C fällt in die Ordinatenaxe, wodurch der Knoten zu einer Spitze wird: ist endlich $a < b$, so erhält $\frac{dy}{dx}$ einen imaginären Werth, dann ist C ein abgesondert liegender Punkt der Konchoide. Die Voraussetzung $a^2b + y^2 = 0$, gibt in 560) wenn $a > b$ ist, $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. i. die Ordinaten der zwei Punkte H', O deren Tangenten auf der Abscissenaxe senkrecht stehen, und welche die Breite des Knotens begrenzen, sind $-\sqrt{a^2b}$, die ihnen zugehörige Abscisse ergibt sich aus 558).

Durch ferneres Differenziren, findet man aus 560)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2y^2(2a^2b-3by^2-y^2)}{(a^2b+y^2)^3}$$

welcher Ausdruck zeigt, daß für $y = \pm a$ die Kurve gegen die Abscissenaxe konkav, hingegen für $y = -b$ konvex ist. Ferner ergibt sich aus 501)

$$R = \frac{a(y^4+2by^3+a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{y^3(y^3+3by^2-2a^2b)} \qquad 561)$$

399. Da die Fläche des Sektors GCJ durch $\frac{1}{2}\int r^2\,dv$ ausgedrückt wird, und $r = a + b\sec v$ ist, so hat man dieselbe Fläche $= \frac{1}{2}\int(b\sec v + a)^2\,dv$

$= \frac{1}{2} f(b^2 \sec^2 v + 2ab \sec v + a^2)\, dv$: nun ist 306)
$f b^2 \sec^2 v\, dv = b^2 tg\, v$, ferner nach 327)
$f 2ab \sec v\, dv = 2ab\, \lambda tg(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}v)$, endlich
$f a^2 dv = a^2 v$, daher diese Fläche
$= \frac{1}{2} b^2 tg\, v + ab\, \lambda tg(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}v) + \frac{1}{2} a^2 v$, zieht 562)
man hievon die Fläche des Dreiecks DCF, nämlich $\frac{1}{2} b^2 tg\, v$ ab, so erhält man für die Fläche DGJF den Ausdruck
$a[b\, \lambda tg(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}v) + \frac{1}{2} av]$. 563)

XIV. Transcendente Kurven.

400. Wenn in einer Kurve ODM (Fig. 24) die auf einander folgenden Abscissen AC, AP, AP' . . . Logarithmen der zugehörigen Ordinaten CD, PM, P'M' . . . sind, so heißt sie eine logarithmische Linie oder Logistik. Für einen Punkt M sei $AP = x$, $PM = y$, mithin $x = \log . y$, oder wenn unter a die Grund- 564)
zahl des logarithmischen Systems vorgestellt wird $y = a^x$ die Koordinatengleichung der Kurve. Aus dieser Gleichung folgt:

a. Daß die Logistik zu beiden Seiten der Ordinatenaxe ohne Ende fortlauft, demnach aus einem einzigen unendlichen Aste besteht. b. Nimmt man die Ordinate im Ursprunge $AB = 1$; und macht $AC = AB$, so ist die dem Punkte C zugehörige Ordinate $CD = a$ der Grundzahl des durch die Kurve vorgestellten logarithmischen Systems gleich. c. Ist $a > 1$, so wird für positive x der Werth von y immer zunehmen, für negative x aber immer fort abnehmen, ohne je zu verschwinden, d. i. es entfernt sich die Kurve in der Gegend der positiven Abscissen ohne Ende von der Abscissenaxe, während ihr anderer Theil BO sich der Abscissenaxe ohne Ende nähert; die Abscissenlinie QX ist also eine Asymptote der Kurve.

401. Das Differentiale der Gleichung 564) gibt $dy = a^x\,dx.\,la = y\,dx.\,la$, mithin ist die

Subtangente $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{1}{la}$ eine unveränderliche Größe. 565)

Setzt man $la = n$, so findet sich die

Subnormale $\frac{y\,dy}{dx} = ny^2$, und der 566)

Krümmungshalbmesser $= \frac{(1+n^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{n^2y}$. 567)

Ferner ergibt sich für ds der Ausdruck

$\frac{\sqrt{(1+n^2y^2)}}{ny}\,dy$, dessen Integrale nach 358), wenn man $X = 1+n^2y^2$, $x = y$, $a = 1$, $r = -1$ setzt, wird $\frac{1}{n}\sqrt{(1+n^2y^2)} + \frac{1}{n}\int\frac{dy}{y\sqrt{(1+n^2y^2)}}$, und nach der Formel 344) ist

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{(1+n^2y^2)}} = \lambda\frac{\sqrt{(1+n^2y^2)}-1}{y} = -\lambda\frac{1+\sqrt{(1+n^2y^2)}}{y},$$

daher ist

$$s = \tfrac{1}{n}\left[\sqrt{(1+n^2y^2)} - \lambda\frac{1+\sqrt{(1+n^2y^2)}}{y}\right.$$

da für $y = 1$, $s = 0$ wird, so ist vollständig

$$s = \tfrac{1}{n}\left[\sqrt{(1+n^2y^2)} - \sqrt{(1+n^2)} + \lambda\frac{(1+\sqrt{(1+n^2)})y}{1+\sqrt{(1+n^2y^2)}}\right. \quad 568)$$

Endlich ist die Fläche ABPM oder

$$\int y\,dx = \frac{y}{n} + C = \frac{y-1}{n} \quad 569)$$

weil die Fläche für $y = 1$ verschwindet.

402. Die krummen Linien, welche sich nach einem bestimmten Gesetze in einer unendlichen Anzahl von Windungen um einen Punkt A (Fig. 25) erstrecken, nennt man Spiralen.

Wenn um den Mittelpunkt des Kreises BDN der Halbmesser AN sich gleichförmig bewegt, und auf diesem der Punkt M vom Mittelpunkte A sich so entfernt, daß immer AM zu dem Halbmesser AB sich verhält, wie der zugehörige Kreisbogen BN zur ganzen Peripherie, so heißt die vom Punkte M beschriebene Kurve die Archimedische Spirale. Ihre Gleichung ergibt sich aus der Proportion $\left.\begin{matrix}AM\\ r\end{matrix}\right\}:\left.\begin{matrix}AB\\ 1\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}BN\\ v\end{matrix}\right\}:2\pi$

nämlich $2\pi r = v$ 570)

Für $v = 2\pi$, wird $r = 1$, hingegen wenn $v = 2n\pi$ ist, wird $r = n$; es schneidet sonach die Spirale nach dem ersten Umlauf des Halbmessers den Kreis in B, und geht dann in unzähligen immer größeren Windungen um den Kreis.

403. Die Subtangente derselben ist, wenn man in 539) α mit v vertauscht $= 2\pi r^2 = \frac{v^2}{2\pi}$, also für $v = 2\pi$, wird sie der Peripherie des Kreises gleich. Die Subnormale 540) $\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2\pi}$ ist unveränderlich; wenn man also auf dem Radiusvektor AM die Senkrechte CAT errichtet, und auf der Seite der zunehmenden Radienvektoren die $AC = (2\pi)^{-1}$ abschneidet, und C mit M verbindet, so ist CM eine Normale, und die auf ihr Senkrechte MT eine Tangente des gegebenen Punktes M.

Der Krümmungshalbmesser findet sich nach 543) $= \frac{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(2+v^2)}$, und der Bogen AM nach 537) $ds = \frac{1}{2}\pi \int dv \sqrt{(1+v^2)}$, woraus mittelst der Formel 359) folgt $s = \frac{1}{4}\pi[v\sqrt{(1+v^2)} + \lambda(v+\sqrt{(1+v^2)}]$ 571)

404. Wenn sich aber bei der gleichförmigen Umdrehung des Halbmessers AN, der Punkt M von A so

entfernt, daß die den in einer arithmetischen Reihe auf einander folgenden Neigungswinkeln zugehörigen Radienvektoren nach einer geometrischen Reihe zunehmen, so beschreibt der Punkt M die logarithmische Spirale. Die Neigungswinkel v sind bei dieser Voraussetzung Logarithmen der zugehörigen Radienvektoren r, man hat also die Gleichung $v = \log. r$ 572)
So lange als v positiv ist, wächst der Radiusvektor ohne Ende: für $v = o$ wird $r = 1$, und für negative Werthe von v wird r immer kleiner ohne je zu verschwinden, weil aus der Gleichung 572) unmittelbar $a^v = r$ folgt, und dieser Ausdruck immer positiv bleibt, wenn auch v negativ angenommen wird: diese Kurve nähert sich also, indem sie rückwärts fortgesetzt wird, in unzähligen Windungen dem Punkte A (Fig. 26) ohne ihn je zu erreichen.
Die Subnormale $\frac{dr}{dv}$ ist gleich r; woraus folgt, daß man, um eine Tangente an einen gegebenen Punkt zu ziehen, nur eine Senkrechte auf dessen Radiusvektor zu errichten hat, die demselben gleich wäre, so ist die Verbindungslinie ihres Endpunktes mit dem Punkte der Kurve eine Normale, also die darauf Senkrechte eine Tangente der Kurve. Nach der Formel 344) ergibt sich
$ds = dr\sqrt{2}$, also $s = r\sqrt{2} + C = (r-1)\sqrt{2}$ 573)
ferner ist ist $d^2s = dr.dv\sqrt{2}$, und daher der
Krümmungshalbmesser $= r\sqrt{2}$. 574)

405. Die Koordinatengleichung dieser Linie zu erhalten, hat man nach den Formeln 411) und 572)
$v = \text{arc.}\, tg\frac{y}{x} = \lambda r = \lambda\sqrt{(x^2+y^2)}$, deren Differentiale nach 260) und 248)
$\frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = \frac{x dx + y dx}{x^2+y^2}\mu)$ ist; hieraus folgt

$dy = \frac{(x+y)\,dx}{x-y}$, daher

$ds = dx^2 + dy^2 = dx^2 \frac{[(x-y)^2+(x+y)^2]}{(x+y)^2} = \frac{2\,dx^2(x^2+y^2)}{(x+y)^2}$

und $d^2y = \frac{2\,dx\,(x\,dy - y\,dx)}{(x-y)^3}$: aber man hat für die Koordinaten der Evolute einer Kurve 526)

$g = x - \frac{R\,dy}{ds} = x - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$, und

$h = y + \frac{R\,dx}{ds} = x + \frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$, also ist auch, wenn man die vorhergefundenen Werthe von d^2y und dx^2+dy^2 substituirt

$g = x - \frac{dy\,(x^2+y^2)}{x\,dy - y\,dx} = -\frac{y\,(x\,dx+y\,dy)}{x\,dy - y\,dx} = -y$

wegen μ), und $u = \frac{x\,(y\,dy+x\,dx)}{x\,dy - y\,dx} = x$

oder die Evolute AN der logarithmischen Spirale ist eine der vorigen gleiche und ähnliche Spirale.

406. Seien AC, AB (Fig. 27) zwei Senkrechte, man beschreibe aus A mehrere konzentrische Kreisbögen PM, P'M', ... und mache sie der Länge nach gleich der Geraden AB = a, so liegen die Punkte M, M' in der hyperbolischen Spirale. Heißt die Länge des mit dem Halbmesser Ap = 1 beschriebenen Kreisbogens pm = v, so hat man $\frac{pm}{Ap} = \frac{PM}{AP} = \frac{a}{r}$, die Gleichung vr = a 575) deren Analogie mit der Gleichung 498) dieser Kurve den Namen gegeben hat. Es ist leicht einzusehen, daß der Ast QM' sich der Geraden BD immer mehr und mehr nähert, welche sonach eine Asymptote der Kurve ist, daß

ferner $r = \frac{a}{v}$ nicht null werden kann, außer wenn $v = \infty$ wird, ist also $v = 2\pi$, $v = 4\pi$, ... so wird r immer kleiner, mithin nähert sich die Kurve in unzähligen Windungen immer mehr dem Punkte A ohne ihn je zu erreichen.

Wenn bei gleich zunehmenden Neigungswinkeln die Radienvektoren im quadratischen Verhältnisse wachsen, so heißt die zugehörige Kurve eine parabolische Spirale. Ihre Gleichung ergibt sich wie (402) $2\pi r^2 = v$ 576)

407. Bewegt sich ein Kreis (Fig. 28) wälzend auf einer geraden Linie so, daß sich die Peripherie des Kreises nach und nach auf dieser geraden Linie durchwindet, so beschreibt jeder Punkt der Kreisebene eine Radlinie, welche die gemeine Cykloide genannt wird, oder die verlängerte oder die verkürzte Cykloide, je nachdem der beschreibende Punkt in der Peripherie des Kreises oder außerhalb oder innerhalb desselben liegt.

Sei AX die Gerade auf welcher der erzeugende Kreis BMQ sich hinwälzt, und M ein Punkt in seiner Peripherie der beschreibende Punkt, der anfänglich in A war, man setze Bogen $BM = AB = \varphi$, $BC = r$, so ist der Bogen, der zwischen den Schenkeln des Winkels BCM mit dem Halbmesser 1 beschrieben wird $\frac{\varphi}{r}$, und wenn man $AP = x$, $PM = y$ setzt, hat man

$$\left.\begin{matrix} AP \\ x \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} AB \\ \varphi \end{matrix}\right\} - \left.\begin{matrix} BP \\ r \sin\frac{\varphi}{r} \end{matrix}\right\}, \text{ und } \left.\begin{matrix} PM \\ y \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} CB \\ r \end{matrix}\right\} - \left.\begin{matrix} CQ \\ r\cos\frac{\varphi}{r} \end{matrix}\right\}$$

die letzte der beiden Gleichungen gibt

$\frac{r-y}{r} = \cos\frac{\varphi}{r}$, also $\frac{1}{r}\sqrt{(2ry - y^2)} = \sin\frac{\varphi}{r}$, und

$\varphi = r \operatorname{arc.cos} \frac{r-y}{r}$; substituirt man diese Werthe in der ersten derselben, so folgt

$$x = r \operatorname{arc.cos} \frac{r-y}{r} - \sqrt{(2ry - y^2)} \quad 577)$$

die Koordinatengleichung der gemeinen Cykloide. Ist aber N der beschreibende Punkt, und man setzt $AR = x$, $NR = y$, $MN = a$, so ist eben so

$$x = \varphi - (r-a) \sin \frac{\varphi}{r}, \quad y = r - (r-a) \cos \frac{\varphi}{r}$$

woraus sich durch eine ähnliche Elimination von φ ergibt

$$x = r \operatorname{arc.cos} \frac{r-y}{r-a} - \sqrt{[a^2 + 2r(y-a) - y^2]} \quad 578)$$

die Koordinatengleichung der verkürzten Cykloide. Aus ihr folgt für $a = o$, die Gleichung 577), setzt man hingegen a negativ, so erhält man die Gleichung der verlängerten Cykloide.

408. Aus der Gleichung $y = r - r \cos \frac{\varphi}{r}$ ist zu ersehen, daß y am größten $= 2r$ wird, wenn $\cos \varphi$ den Werth -1 erhält, wodurch φ in 180° übergeht, mithin $\varphi = \pi r$ wird: man hat dann $x = \pi r$, und den zugehörigen Punkt der Cykloide nennt man ihren Scheitel. Nimmt man denselben zum Anfangspunkt, und seine Tangente DE zur Abscissenaxe, so ist für jeden Punkt M die Abscisse $EF = t$, die Ordinate $FM = u$; hiedurch wird $y = 2r - u$, $x = \pi r - t$, daher gibt die Gleichung 577) $\pi r - t = r \operatorname{arc.cos} \frac{u-r}{r} - \sqrt{(2ru - u^2)}$ oder

$$t = r[\pi - \operatorname{arc.cos} \frac{u-r}{r}] + \sqrt{(2ru - u^2)}, \text{ allein}$$

$\pi - \operatorname{arc.cos}(u-r) = \operatorname{arc.cos}(r-u)$, sonach wird

$t = r \operatorname{arc.cos} \frac{r-u}{r} + \sqrt{(2ru - u^2)}$ die zugehö- 579)
rige Koordinatengleichung.

Nimmt man aber den Scheitel zum Anfangspunkt, und die Axe GE zur Abscissenaxe, so ist für jeden Punkt M, die Abscisse $EO = p$, die Ordinate $OM = q$, und man hat $OM = EF = t$, $EO = u$: hiedurch verwandelt sich die Gleichung 579) in

$$q = r \operatorname{arc.cos} \frac{p+r}{r} + \sqrt{(-2pr - p^2)}. \quad 580)$$

409. Da $d.r \operatorname{arc.cos} \frac{r-u}{r} = \frac{r\,du}{\sqrt{(2ru-u^2)}}$ ist, so hat man aus 579) $dt = \frac{(2r-u)\,du}{\sqrt{(2ru-u^2)}} = du\sqrt{\frac{2r-u}{u}}$, also die Subnormale

$\frac{u\,du}{dt} = u\sqrt{\frac{u}{2r-u}}$, die Subtangente 581)

$\frac{u\,dt}{du} = \sqrt{(2ru-u^2)}$: es ist aber $\sqrt{(2ru-u^2)}$ 582)
$= \sqrt{(2r-u)\,u} = MQ$, daher $TE = MQ$; wenn man also die Gerade MO parallel zur Basis zieht, bis sie im Punkte S den Erzeugungskreis trifft, und S mit E verbindet, endlich MT mit SE parallel zieht, so ist MT die geforderte Tangente. Ferner ist

$ds = \sqrt{(dt^2 + du^2)} = \sqrt{\frac{2r}{u}}.du$, daher $s = 2\sqrt{2ru}$, 583)

wenn der Bogen mit u zugleich verschwindet: endlich hat man die Fläche $EMF = \int u\,dt = \int du\sqrt{(2ru-u^2)}$, welches nach der Formel 375) integrirt, gibt

$EMF = \frac{1}{2}(u-r)\sqrt{(2ru-u^2)} + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{arc.sin} v \frac{u}{r}$ 584)

wo $C = o$ ist, wenn die Fläche mit u zugleich verschwindet: setzt man hierin $u = 2r$, so erhält man die

Fläche EHA $= \frac{1}{2} r^2 \text{ arc. } sin\, v. 2 = \frac{1}{2} \pi r^2$, also die Fläche AGE $= 2\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$, und die Fläche der ganzen Cykloide $2\,AGE = 3\pi r^2$. 585)

410. Differenzirt man die Gleichung 577), so erhält man

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ry - y^2)}},\quad ds = dy\sqrt{\frac{2r}{2r-y}},\text{ und}$$

$$d^2y = -\frac{r\,dy^2}{2ry - y^2},\text{ endlich } R = -2\sqrt{2ry}:$$ substituirt man diese Ausdrücke in den Gleichungen 525), so findet man

$$g = x + 2\sqrt{(2ry - y^2)}$$

$$= r \text{ arc. } cos\frac{r-y}{r} + \sqrt{(2ry - y^2)},\text{ und}$$

$h = -y$, also ist die Gleichung für die Evolute der Cykloide $g = r \text{ arc. } cos\frac{r+h}{r} + \sqrt{(-2rh - h^2)}$, welche mit 580) verglichen zeigt, daß die Evolute der gemeinen Cykloide wieder eine der vorigen gleiche und ähnliche Cykloide AJ sei, deren Scheitel in A sich befindet.

411. Bewegt sich derselbe Kreis statt auf einer geraden Linie so auf einem zweiten Kreise, und zwar von außen, so erhält man widerum, je nachdem der beschreibende Punkt am Umfange des erstern, oder aber innerhalb oder außerhalb desselben gelegen ist, die gemeine, verkürzte, oder verlängerte Epicykloide.

Sei DBM (Fig. 29) der sich an dem festen Kreis ABE fortwälzende Kreis, so daß M anfänglich in A war, und nun die Kurve AMK beschreibt, während K derjenige Punkt der Kurve sein soll, welchen man erhält, wenn der Durchmesser MCD in die Richtung EK gekommen ist, in deren Verlängerung der Mittelpunkt O liegt,

so daß die Bogen AB und MB, BE und BD einander gleich sind. Setzt man $OP = x$, $PM = y$, Bogen $BE =$ Bogen $BD = \varphi$, $OB = R$, $BC = r$, und Kürze halber $\frac{\varphi}{R} = v$, $\frac{\varphi}{r} = V$, so ist $CO = R + r$, $COK = LCO = v$ $BCD = V$, $BCM = \pi - V$, $LCM = \pi - (V + v)$; folglich ist

$$OQ = OC \cos COK = (R + r) \cos v,$$

$$PQ = CM. \cos MCL = -r \cos(V + v)$$

$CQ = (R + r) \sin v$, $ML = r \sin(V + v)$. Man hat aber $x = OQ - PQ$, $y = CQ + ML$: dieß gibt

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r) \cos v + r \cos(V + v) \\ y &= (R + r) \sin v + r \sin(V + v) \end{aligned}\right\} \quad 586)$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nur in den Fällen, wenn $R : r$ ein rationales Verhältniß $m : 1$ hat, die Größen V, v eliminiren: dann ist nämlich

$R = mr$, also $V = mv$, und daher

$x = (m + 1) r \cos v + r \cos(m + 1) v$

$y = (m + 1) r \sin v + r \sin(m + 1) v$. Entwickelt man die Sinus und Kosinus der vielfachen Winkel nach den Potenzen von $\sin v$ und $\cos v$, und setzt hierin statt $\sin v$ seinen Werth $\sqrt{(1 - \cos^2 v)}$, so erhält man zwei algebraische Gleichungen zwischen x, y und $\cos v$, aus welchen durch Elimination von $\cos v$ ein algebraischer Ausdruck zwischen x und y zum Vorschein kommt, daher ist in solchen Fällen die Epicykloide eine algebraische Kurve.

Ist $R = r$, also $V = v$, so hat man

$x = 2r \cos v + r \cos 2v$, $y = 2r \sin v + r \sin 2v$, daher

$$x^2 + y^2 = 5r^2 + 4r^2 (\cos v . \cos 2v + \sin v . \sin 2v)$$
$$= 5r^2 + 4r^2 \cos v, \text{ und hieraus}$$

$\cos v = \frac{x^2+y^2-5r^2}{4r^2}$: setzt man diesen Werth im Ausdrucke von x, nachdem man $\cos 2v$ mit $2\cos^2 v - 1$ vertauscht hat, so erhält man

$8r^3 x = (x^2+y^2-5r^2)(x^2+y^2-r^2) - 16r^4$,

welches nach gehöriger Reduktion die Gleichung der Kardioide gibt.

412. Bewegt sich aber ein Kreis MBD (Fig. 30) innerhalb eines festen Kreises, so beschreibt dessen beliebiger Punkt M, wenn er anfänglich in A war, die Hypocykloide AMK, deren Gleichung man erhält, wenn man bei obigen Bezeichnungen in 586) r negativ annimmt, da dann

$x = (R-r)\cos v + r\cos(V-v)$, und

$y = (R-r)\sin v + r\sin(V-v)$ wird.

In dem besonderen Falle da $R = 2r$ ist, wird $V = 2v$, also $x = 2r\cos v$, $y = 2r\sin v$, daher $x^2+y^2 = 4r^2$, welches die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser $2r$ ist.

Viertes Buch.

Flächen und Kurven mit doppelter Krümmung.

1. Lage eines Punktes im Raume.

413. Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt **A** (Fig. 31) den Anfangspunkt der Koordinaten, drei wechselweise auf einander senkrecht stehende Ebenen **ZAY**, **ZAX**, **XAY**, die koordinirten Ebenen, gelegt, welche in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte acht dreiflächige körperliche Winkel bilden, so ist die Lage eines jeden Punktes **M** im Raume bekannt, sobald die Abstände desselben von den koordinirten Ebenen **MB**, **MC**, und **ME** gegeben sind, und dabei bestimmt ist, innerhalb welcher der acht Ecken er liegt: denn bezeichnet man jene Abstände mit **c**, **b**, **a** und führt diesseits und jenseits der drei koordinirten Ebenen in den eben genannten Abständen ihnen parallele Ebenen, so bilden dieselben ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen 8 Eckpunkte allein den Bedingungen Genüge leisten, daß ihre Abstände von den koordinirten Ebenen beziehungsweise die Größen **a**, **b**, **c** sind; ist daher noch bekannt, innerhalb welcher der 8 Ecken ein Punkt liegen soll, welches durch die Vorzeichen der Größen **a**, **b**, **c** angegeben werden kann, so bleibt über die Lage desselben kein Zweifel mehr übrig.

Man nennt die drei Durchschnittslinien AX, AY, AZ der koordinirten Ebenen, die Axen, und die ihnen parallelen Abstände eines Punktes, dessen Koordinaten, die man gewöhnlich mit x, y und z bezeichnet, daher auch die Axen, welchen diese Koordinaten parallel laufen, die Namen: Axen der x, der y der z, so wie die Ebenen, auf welchen diese Koordinaten senkrecht stehen, die Ebenen der yz, xz, xy heißen.

414. In dem Polarkoordinatensysteme wird die Position eines Punktes auf eine fixe Ebene XAY die Basis, und auf eine in ihr gezogene Gerade AX die Axe, und auf einen im letzteren angenommenen fixen Punkt A, den Pol bezogen, und dadurch bestimmt, daß man die Entfernung des Punktes vom Pole, den Radiusvektor, ferner die Neigung desselben gegen die Axe, und endlich die Neigung der Ebene MAX in welcher der Radiusvektor und die Axe liegen gegen die Basis, angibt. Um sämmtliche Koordinaten positiv zu machen, ist es hinreichend, dem einen der beiden Winkel in bestimmten Richtungen alle Werthe von o bis π und dem andern alle Werthe von o bis 2π zu ertheilen.

415. Die Verwandlung der rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten, und dieser in jene, kann mittelst sehr einfacher Gleichungen vorgenommen werden. Da die Ebenen MBDC und XAY sich in der Geraden BD unter einem rechten Winkel schneiden, und auf der letzteren die AD senkrecht steht, so ist sie auch senkrecht auf der Ebene MBDC, und auf der in derselben gelegenen MD, sonach ist MDB der Neigungswinkel der Ebenen XAY und MDAE. Bezeichnet man nun im Polarkoordinatensysteme den Radiusvektor AM mit r, und die Winkel MAX, MDB mit α und ω, so hat man im rechtwinkligen Dreiecke MAD

$$AD = AM.\cos\alpha,\ MD = AM.\sin\alpha$$

nämlich $x = r\cos\alpha$, und $MD = r\sin\alpha$, ferner 587)
gibt das rechtwinklige Dreieck MBD

$$BD = MD\cos\omega,\ MB = MD\sin\omega, \text{ oder}$$

$$y = r\sin\alpha\cos\omega, \text{ und} \quad 588)$$

$$z = r\sin\alpha\sin\omega \quad 589)$$

erhebt man diese Ausdrücke zum Quadrate, und setzt statt $\sin^2\omega$ die Größe $1 - \cos^2\omega$, so gibt ihre Summe $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, aus 587) folgt ferner 590)

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}, \text{ wenn man 589)} \quad 591)$$

durch 588) dividirt, wird

$$tg\,\omega = \frac{z}{y} \quad 592)$$

Bezeichnet man die Winkel MAY und MAZ mit β und γ, so hat man der Gleichung 587) analog $y = r\cos\beta$ und $z = r\cos\gamma$, und die Summe der Quadrate gibt

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$ daher, wegen 590) wird

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ d. i. jeder Ra- 593)
diusvektor schließt mit den drei rechtwinkligen Koordinatenaxen Winkel ein, deren Kosinusse zum Quadrat erhoben zusammengenommen der Einheit gleich sind.

416. Der Punkt, in welchem ein aus einem gegebenen Punkte M auf eine Linie oder auf eine Ebene gefälltes Perpendikel derselben begegnet, heißt die Projektion des gegebenen Punktes auf die gerade Linie oder Ebene, während diese die Projektionslinie oder Projektionsebene genannt werden. Denkt man sich alle Punkte einer begrenzten geraden Linie auf die Richtung einer andern Geraden, oder auf eine Ebene

projizirt, so stellt die Folge dieser Projektionen, die Projektion der gegebenen Geraden dar; es wird also die Projektion einer Linie auf einer Ebene verzeichnet, wenn sich eine diese Ebene senkrecht treffende Gerade so bewegt, daß sie stets durch die gegebene Linie hindurch geht, oder wenn man sich durch die gegebene Linie eine Ebene gezogen vorstellt, welche die Projektionsebene senkrecht schneidet, und ihren gegenseitigen Durchschnitt bestimmt. Endlich ist die Projektion einer wie immer begrenzten Figur auf eine Ebene, die Fläche, welcher auf der Projektionsebene durch die Projektionen des Umfanges der Figur eingeschlossen wird.

Hiernach ist D die Projektion des Punktes M, und AD die Projektion der Geraden AM auf die Axe der x d. i. im rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Koordinaten eines Punktes die Projektionen des zu diesem Punkte aus dem Ursprunge gezogenen Radiusvektor auf die Koordinatenaxen.

417. Ist M' ein Punkt, dessen Koordinaten x', y', z' bedeuten mögen, und B' seine Projektion auf die Ebene xy, und man zieht B'H zur Axe der x parallel, bis sie die wo nöthig verlängerte DB schneidet, und MG auf M'B' senkrecht, so hat man $M'G = M'B' - GB' = z' - z$, $BH = DB - DH = y - y'$, und $B'H = x' - x$, dieß gibt, wenn man den Abstand MM' beider Punkte mit D bezeichnet, $D^2 = MG^2 + M'G^2$, und $MG^2 = B'B^2 = BH^2 + B'H^2 = (y - y')^2 + (x' - x)^2$, durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich

$$D^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2 \qquad 594)$$

Bemerkt man nun noch, daß der Unterschied der Koordinaten $z - z'$, $y - y'$, und $x - x'$ nichts anders als die Projektionen der Geraden MM' im Raume auf die

Koordinatenaxen vorstellt (416), so führet die eben abgeleitete Formel auf den Satz: **das Quadrat einer begrenzten Geraden im Raume, ist der Summe der Quadrate ihrer Projektionen auf die Koordinatenaxen gleich.**

II. Transformation der Koordinaten.

41. Bei der Transformation der Koordinaten, welche zum Behufe der Vereinfachung einer Gleichung vorgenommen wird, kommen hauptsächlich zwei Fälle in Anwendung; entweder beabsichtiget man bloß den Anfangspunkt der rechtwinkligen Koordinaten aus A nach A′ (Fig. 32) zu versetzen, und dabei die neuen Axen A′X′, A′Y′, A′Z′ den vorigen parallel sein zu lassen: oder man will mit Beibehaltung des Anfangspunktes bloß die Richtung der rechtwinkligen Axen so verrücken, daß die neuen gleichfalls rechtwinkligen Axen, mit den vorigen irgend einen Winkel einschließen.

Im ersten Falle seien $PM = z$, $PD = y$, $AD = x$ die Koordinaten eines Punktes M im vorigen, und $MP' = z'$, $P'D' = y'$, $A'D' = x'$ die Koordinaten desselben Punktes im neuen Systeme, ferner seien die Koordinaten des Anfangspunktes $A'B = c$, $BC = b$, $AC = a$. Da die Axen beider Systeme einander parallel sind, so sind es auch die koordinirten Ebenen, und a, b, c stellen beziehungsweise ihre Abstände vor, sonach hat man

$$A'B = PP', \text{ und daher}$$
$$PM \text{ oder } z = z' + c.$$

Führt man BE zu AX parallel, und vereinigt E mit D′, so ist $BE = CD$, und $BC = ED$, und da die BE, also auch die ED′ in der Ebene X′A′Z′ liegen, und MP dieser Ebene parallel läuft, so sind die Geraden PE, P′D′ einander gleich, daher hat man

$$PD = P'D' + ED,\ AD = AC + BE, \text{ oder}$$
$$y = y' + b,\ x = x' + a$$

419. Seien x, y, z die Koordinaten des Punktes M (Fig. 33) bezogen auf die Axen AX, AY, AZ, und es werden die Axen AX und AY allein verrückt, daß sie in die Lage AX' und AY' kommen, so bleibt die auf die Ebene xy senkrechte Ordinate MP jedes Punktes M dieselbe, aber die den Axen AX, AY parallelen Koordinaten erleiden eine Aenderung, welche nach (301) bestimmt werden kann. Unabhängig von den dort angegebenen Formeln findet man aber ihre Werthe so: sei der Winkel $XAX' = \psi$, und $PAX = \alpha$, $PAX' = \alpha'$, so ist, wenn man die Senkrechten PC, PD auf AX und AX' zieht, und AP zur Einheit annimmt,
$x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $x' = \cos\alpha'$, $y' = \sin\alpha'$ und
$\alpha = \alpha' + \psi$, daher
$\cos\alpha = \cos\alpha' . \cos\psi - \sin\alpha' . \sin\psi$, oder
$x = x' \cos\psi - y' \sin\psi$ und
$\sin\alpha = \cos\alpha' . \sin\psi + \sin\alpha' . \cos\psi$, oder
$y = x' \sin\psi + y' \cos\psi$.
Liegt aber AX' außerhalb des Winkels XAY, so daß $\alpha = \alpha' - \psi$ wird, so erhält in beiden Ausdrücken das Glied mit dem Faktor $\sin\psi$ das entgegengesetzte Zeichen.

420. Läßt man jetzt mit Beibehaltung des Anfangspunktes A das rechtwinklige System, dessen Axen AX, AY, AZ (Fig. 34) sind, so verrücken, daß jene Axen in die Lage AX', AY', AZ' kommen, es sei AH die Durchschnittslinie der Ebenen XAY, X'AY, und $HAX = \psi$, $HAX' = \varphi$, und der Neigungswinkel der Ebenen xy und x'y', welcher dem Winkel der auf diese Ebenen senkrechten Axen der z und z' gleich kommt, sei ϑ. Zieht man AK senkrecht auf AH in der Ebene XAY, und nimmt man AH und AK als die Axen der x

und y eines neuen rechtwinkligen Systems, dessen dritte Axe AZ wäre, und bezeichnet die Koordinaten irgend eines Punktes in demselben mit x'', y'', z'', so hat man, nach (419)

$$z = z'', \quad x = x'' \cos\psi - y'' \sin\psi,$$
$$y = x'' \sin\psi + y'' \cos\psi$$

Zieht man aber AL in der Ebene X'AY' ebenfalls senkrecht auf AH, und betrachtet AZ und AL, als die Axen der z und y eines rechtwinkligen Systems, dessen dritte Axe AH wäre, und bezeichnet die Koordinaten desselben Punktes in Beziehung auf dieselben mit x''', y''', z''', so hat man zur Transformation der Koordinaten x'', y'', z'' in die letzt genannten die Gleichungen

$$x'' = x''', \quad y'' = z''' \sin\vartheta + y''' \cos\vartheta$$
$$z'' = z''' \cos\vartheta - y''' \sin\vartheta$$

Man transformire endlich mit Beibehaltung der Axe AZ' die den Axen AH und AK parallelen Koordinaten in die auf AX' und AY' sich beziehenden, so ergeben sich die Gleichungen

$$z''' = z', \quad x''' = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$$
$$y''' = -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$

Schafft man durch Verbindung dieser sechs Gleichungen die Größen x'', y'', z'' und x''', y''', z''' weg, so gelangt man zu folgenden wichtigen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta)\, x' \\ &\quad + (\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta)\, y' \\ &\quad - \sin\psi \sin\vartheta \, z' \\ y &= (\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta)\, x' \\ &\quad + (\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta)\, y' \\ &\quad + \cos\psi \sin\vartheta \, z' \\ z &= \sin\varphi \sin\vartheta \, x' - \cos\varphi \sin\vartheta \, y' \\ &\quad + \cos\vartheta \, z' \end{aligned}\right\} \quad 595)$$

421. Wenn man die Koeffizienten von x', y', z' Kürze halber mit a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 bezeichnet, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \end{aligned}\right\} \mu)$$

sind nun ferner

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{matrix}\right\}$$ die Winkel, welche $\left\{\begin{matrix} AX' \\ AY' \\ AZ' \end{matrix}\right\}$ mit den Axen der x, y, z einschließt, so ist für einen in der Axe der x' liegenden Punkt, $y' = 0$, $z' = 0$, daher gibt die erste der drei Gleichungen μ) $x = a_1 x'$, und wegen 587) wird, da hier r in x' übergeht, $a_1 = \cos\alpha_1$: und eben so ergibt sich $b_1 = \cos\beta_1$, $c_1 = \cos\gamma_1$. Auf gleiche Art findet man durch Betrachtung von Punkten der Geraden AX', AY'

$$a_2 = \cos\alpha_2,\ b_2 = \cos\beta_2,\ c_2 = \cos\gamma_2$$
$$a_3 = \cos\alpha_3,\ b_3 = \cos\beta_3,\ c_3 = \cos\gamma_3$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen μ), so folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\beta_1 + z'\cos\gamma_1 \\ y &= x'\cos\alpha_2 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\gamma_2 \\ z &= x'\cos\alpha_3 + y'\cos\beta_3 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \quad 596)$$

422. Erhebt man aber die Gleichungen μ) zum Quadrat, und nimmt ihre Summe, so erhält man:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + y'^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + z'^2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + 2x'y'(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + 2x'z'(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + 2y'z'(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)$$

da nun die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und x', y', z' einem und demselben Punkte angehören, und einerlei Ursprung haben, also $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ ν) ist, so folgt daß die obige Gleichung nur dann bestehen kann, wenn die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ und } \quad 597)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 598)$$

Statt finden.

Multiplizirt man die erste der drei Gleichungen μ) mit a_1, die zweite mit a_2, die dritte mit a_3, so gibt die Summe dieser Produkte

$a_1 x + a_2 y + a_3 z = x'(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + y'(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + z'(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)$, und mit Rücksicht auf die angegebenen Bedingungsgleichungen, wird

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + a_2 y + a_3 z &= x', \text{ und eben so folgt} \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z &= y', \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z &= z' \end{aligned}\right\} \quad 599)$$

mittelst welcher Gleichungen man von dem rechtwinkligen Koordinatensysteme x', y', z' zu dem gleichfalls rechtwinkligen Koordinatensysteme x, y, z übergehen kann.

Erhebt man endlich auch diese Gleichungen zum Quadrat, so gibt ihre Summe wegen ν) die Bedingungsgleichungen:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \quad 600)$$

und $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$, $a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \quad 601)$$

III. Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie.

423. Die Relationen 595) zwischen den Koordinaten eines Punktes in zweien rechtwinkligen Systemen geben für einen in der Axe der x' gelegenen Punkt, da [illegible] vektor und $y' = 0$, $z' = 0$ wird,

$$\left.\begin{aligned} x &= (\cos\varphi.\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi.\cos\vartheta)\,x' \\ y &= (\cos\varphi.\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta)\,x' \\ z &= \sin\varphi.\sin\vartheta.\,x'. \end{aligned}\right\} \quad 602)$$

Wenn aber der Winkel $XOX' = \alpha$, (Fig. 35) und der Neigungswinkel der Ebenen XOX' und XOH $= \omega$ gesetzt wird, so ist (415)

$x = x'.\cos\alpha$, $y = x'.\sin\alpha.\cos\omega$, $z = x'\sin\alpha\sin\omega$

und deßhalb hat man

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\varphi.\cos\psi + \sin\varphi.\sin\psi\cos\vartheta \\ \sin\alpha.\cos\omega &= \cos\varphi.\sin\psi - \sin\varphi.\cos\psi\cos\vartheta \\ \sin\alpha.\sin\omega &= \sin\varphi.\sin\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad 603)$$

auf welchen Formeln sämmtliche Vorschriften der sphärischen Trigonometrie beruhen.

424. Sei O (Fig. 34) eine durch das Zusammentreffen dreier Ebenen X'OX, XOH, X'OH gebildete Ecke, und man beschreibe aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OA $= 1$ eine Kugel, welche den Geraden OH, OX, OX' in den Punkten A, B, C und den Ebenen XOH, X'OH, X'OX in den Bogen AB, AC, BC größter Kreise begegnen, so erhält man ein sphärisches Dreieck dessen Seiten AB, AC, BC durch dieselben Größen vorzustellen sind, welche die Winkel XOH, X'OH, XOX' bezeichnen, und dessen Winkel, den Neigungswinkeln der in den Geraden OH, OX, OX' sich schneidenden Ebenen gleich kommen: da man sich unter dem Winkel zweier Bogen wohl nichts anderes, als den Winkel ihrer zu dem Durchschnittspunkte gehöriger Tangenten vorstellen kann, und letzterer offenbar der Neigungswinkel der zusammenstoßenden Ebenen ist.

Bezeichnet man die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten des sphärischen Dreiecks mit a, b, c, so sind in den Gleichungen 603) die Buchstaben

$$\alpha, \varphi, \psi, \vartheta, \omega$$
mit a, b, c, A, B

zu verwechseln; es bestehen demnach für ein sphärisches Dreieck, die Gleichungen:

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A \qquad 604)$$
$$\sin a . \cos B = \cos b . \sin c - \sin b . \cos c . \cos A \qquad \varrho)$$
$$\sin a . \sin B = \sin b . \sin A \qquad 605)$$

Die letzte derselben drückt den Satz aus, daß sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten: die erste hingegen dient zur Bestimmung einer Seite aus den gegebenen zwei Seiten, und dem eingeschlossenen Winkel, oder aber zur Berechnung eines Winkels, wenn alle drei Seiten bekannt sind.

Setzt man den Werth von $\sin a = \frac{\sin b \sin A}{\sin B}$ aus 605) in die Gleichung ϱ); so ergibt sich

$$\sin A . \cot B = \cot b . \sin c - \cos c . \sin A \qquad 606)$$

mittelst welcher Gleichung man aus drei, der vier neben einander liegenden Stücken B, c, A, b gegebenen, das vierte berechnen kann.

425. Man verwechsle in der Gleichung ϱ) B mit C folglich auch b mit c, man erhält

$$\sin a \cos C = \cos c . \sin b - \sin c . \cos b . \cos A$$

und multiplizire ϱ) mit $\cos A$, so wird

$$\sin a . \cos A . \cos B = \cos b . \sin c . \cos A - \sin b . \cos c . \cos^2 A$$

die Summe beider Gleichungen gibt nun

$$\sin a (\cos C + \cos A . \cos B)$$
$$= \cos c . \sin b - \sin b . \cos c . \cos^2 A = \cos c . \sin b \sin^2 A$$

und wenn man statt $\sin a$ dessen Werth aus 605) setzt, so ergibt sich

$$\cos C + \cos A . \cos B = \cos c . \sin A . \sin B \qquad 607)$$

wodurch aus den Winkeln eines sphärischen Dreieckes

eine Seite, oder aber aus zwei Winkeln und der Zwischenseite, der dritte Winkel bestimmt werden kann.

Verwechselt man in der letzteren Gleichung C mit A, und schreibt sie in der Gestalt

$$-\cos A = \cos B.\cos C - \sin B.\sin C.\cos a$$

so erhellet sogleich, daß sie aus der Gleichung 604) abgeleitet werden kan, wenn man a, b, c A mit $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$ vertauscht; es läßt sich sonach zu jedem sphärischen Dreieck ein anderes, das sogenannte Polardreieck finden, dessen Seiten mit den Winkeln des ersteren, und dessen Winkel mit den Seiten des ersteren stückweise zusammengenommen 180° betragen.

426. Man kann die Formeln 604) u. d. f. auf einem noch einfachern Wege ableiten. Zieht man an den Winkel B des sphärischen Dreieckes ABC (Fig. 35) die Tangenten BD, BE, bis sie die von O gezogenen Geraden OC, OA schneiden, so schließen sie einen ebenen Winkel DBE ein, welcher dem sphärischen Winkel B gleich ist: nun hat man nach 426) im Dreiecke DBE

$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2\,BD \times BE \cos B$, und im Dreiecke DOE ist $DE^2 = DO^2 + EO^2 - 2DO \times EO \cos DOE$: zieht man diese zwei Gleichungen von einander ab, und setzt $BD = tg\,BC = tg\,a$, $BE = tg\,AB = tg\,c$, $DO = sec\,BC = sec\,a$, $EO = sec\,AB = sec\,c$, und $DOE = AC = b$; so erhält man

$$sec^2 a - tg^2 a + sec^2 c - tg^2 c - 2\,sec a.\,sec c \cos b + 2\,tg a\,tg c \cos B = 0$$

substituirt man statt sec^2 überall $1 + tg^2$, und multiplizirt hierauf mit $\frac{1}{2}\cos a \cos c$, so wird wegen 154) $\cos b = \cos a \cos c + \sin a.\sin c \cos B$ übereinstimmend mit 604). Ferner ist aus derselben Formel

$$1+\cos A=\frac{\sin b.\sin c+\cos a-\cos b.\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}$$

oder, wenn man $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$ setzt, so erhält man wegen 108)

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}.$$ Eben so ergibt sich 608)

$$1-\cos A=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\sin c}$$

oder wegen 107)

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$: hieraus folgt 609)

$$tg\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$$ 610)

und wegen 101)

$$\sin A=2\sqrt{\frac{\sin s.\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$ 611)

Bezeichnet man den Zähler dieses Ausdruckes mit K, und vertauscht A mit B also auch a mit b, so erhält man

$$\sin A=\frac{K}{\sin b\sin c},\ \sin B=\frac{K}{\sin a\sin c},\ \text{mithin}$$

$\sin A:\sin B=\sin a:\sin b$, welches die Gleichung 605) gibt. Aus diesen beiden erhält man die dritte Hauptformel so:

Es ist $\cot B=\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}\cdot\frac{\sin a}{\sin b.\sin A}$

oder $\cot B\sin A=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin b\sin c}$

$$=\frac{\cos b-\cos c\,[\cos b\cos c-\sin b\sin c\cos A]}{\sin^2 b\sin c},$$ woraus

wenn man die angedeutete Multiplikation verrichtet, und

$1 - \sin^2 c$ statt $\cos^2 c$ setzt, sogleich folgt
$\sin A \cot B = \cot b \sin c - \cos c \cos A$, wie in 606)

Endlich hat man $\cot B = \dfrac{\cot b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A}$

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}; \text{ daher}$$

$$\cot B \sin B = \frac{\cos b \sin c}{\sin a} - \frac{\cos A \sin b \cos c}{\sin a}$$

Setzt man hier $\dfrac{\sin a . \sin C}{\sin A}$ statt $\sin c$, und
$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ statt $\cos c$, so wird

$$\cos B = \frac{\cos b \sin C}{\sin A} - \cos A \sin b \cos b \cot a - \sin^2 b \cos A \cos C \quad \nu)$$

Man hat aber nach 606), wenn man statt A, B, b, c beziehungsweise C, A, a, b setzt
$\sin C \cot A = \cot a \sin b - \cos b \cos C$, woraus folgt
$\cot a \sin b = \sin C \cot A + \cos b \cos C$, und für diesen Werth gibt die Gleichung ν), wenn man die in $\cos A \cos C$ multiplizirten Glieder vereinigt

$$\cos B + \cos A \cos C = \frac{\cos b \sin C}{\sin A} - \frac{\cos^2 A \cos b \sin C}{\sin A}$$

substituirt man noch $1 - \sin^2 A$ statt $\cos^2 A$, so erhält man $\cos B + \cos A \cos C = \sin A \sin C \cos b$, welches die Gleichung 607) ist, wenn man B mit C und b mit c vertauscht.

IV. Sphärische Dreiecke.

427. Man nennt ein sphärisches Dreieck **rechtwinklig**, wenn es einen rechten Winkel enthält: die demselben gegenüberstehende Seite heißt dann die **Hypothenuse**, die beiden anderen Seiten die **Katheten**. Läßt man nun in den bisher aufgestellten Formeln

604) bis 607) A einen rechten Winkel bedeuten, so erhält man für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, dessen Hypothenuse a ist, folgende Gleichungen:

Aus der Formel
604) $\cos a = \cos b . \cos c$ 612)
606) $\cot B = \cot b \sin c$ 613)
605) $\sin b = \sin a \sin B$ 614)
607) $\cos C = \cos c \sin B$ 615)

Verwechselt man aber in der Formel ϱ) (424) A mit B also auch a mit b, und setzt dann $A = 90°$; so wird

$$o = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \text{ woraus}$$

$$\cot a = \cot c \cos B \text{ folgt.} \quad 616)$$

Wenn man hingegen in der Formel 607) A mit C und a mit c verwechselt, und hierauf $A = 90°$ setzt, so wird

$$\cos B \cos C = \cos a \sin B \sin C; \text{ daher ist}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \quad 617)$$

428. Mittelst dieser sechs Gleichungen lassen sich alle bei der Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke vorkommenden Fälle behandeln.

Die Gleichung 612) gibt die Hypothenuse a aus den beiden Katheten, und wird ungenau, wenn a nahe $o°$ oder $180°$ gleich ist; man setze dann $tg\, x = \cos b . \cos c$, also $\frac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = tg^2 \frac{1}{2} a = tg(45° - x)$ so wird $tg \frac{1}{2} a = \sqrt{tg(45° - x)}$. Zur Bestimmung der 618) einen Kathete c hat man $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, und wenn c sehr klein ist, so setze man $\frac{\cos a}{\cos b} = tg\, x$; hiedurch wird

$tg \frac{1}{2} c = \sqrt{tg(45° - x)}$. Oder weil $tg \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}}$ ist, so wird, wenn man statt $\cos c$ diesen Werth substituirt, $tg \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}} = \sqrt{tg \frac{1}{2}(a+b) tg \frac{1}{2}(a-b)}$ 619)

Die Gleichung 613) liefert aus den beiden Katheten den einen Winkel, oder aus einem Winkel und der anliegenden Kathete die gegenüberstehende Kathete, oder endlich aus dieser und dem Winkel B die andere Kathete c, mittelst der Formel $\sin c = tg\, b \cot B$: ist c nahe 90° gleich, so setze man $tg\, x = tg\, b \cot B$, $tg\, y = \sqrt{tg\,(45° - x)}$, so ist $c = 90° \pm 2y$: oder man substituire in 174) $90° - c$ statt α, hiedurch wird

$$tg\,(45° - \tfrac{1}{2}c) = \sqrt{\frac{1 - \sin c}{1 + \cos c}} = \sqrt{\frac{1 - tg\, b \cot B}{1 + tg\, b \cot B}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin B \cos b - \cos B \sin b}{\sin B \cos b + \cos B \sin b}} = \sqrt{\frac{\sin(B - b)}{\sin(B + b)}}; \quad 620)$$

macht man also $\sqrt{\frac{\sin(B-b)}{\sin(B+b)}} = tg\, x$, so erhält man $x = 45° - \frac{1}{2}c$, oder $c = 90° - 2x$.

Die Gleichung 614) gibt erstlich aus der Hypothenuse a und dem Winkel B die gegenüberstehende Kathete b, wobei man, wenn b nahe 90° ausfällt, $tg\, x = \sin a \sin B$, und $tg\, y = \sqrt{tg\,(45° - x)}$ zu setzen hat, hiedurch wird $b = 90° \pm 2y$. Ferner erhält man den Winkel B aus der Hypothenuse, und der gegenüberstehenden Kathete b. Ist B wenig von 90° verschieden, so setze man $tg\, x = \frac{\sin b}{\sin a}$, ferner $tg\, y = \sqrt{tg\,(45° - x)}$, so ist wie oben $B = 90° \pm 2y$: oder man nehme x so, daß $\sin B = \cos 2x$ wird, hiedurch entsteht

$$tg\, x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b}}, \text{ und wegen}$$

172) $tg\, x = \sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}(a - b)}{tg\,\frac{1}{2}(a + b)}}$, dann ist $B = 90° - 2y$. 621)

Man erhält endlich $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$, und wenn a nahe

$90°$ ist, so wird für $tg\,x = \sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}(B-b)}{tg\,\frac{1}{2}(B+b)}}$, $a = 90° \pm 2x$:

oder man setze $tg\,x = \frac{sin\,b}{sin\,B}$, $tg\,y = \sqrt{tg\,(45° - x)}$,

so ist $a = 90° \pm 2y$. Die Gleichung 615) dient zur Bestimmung des Winkels C aus der gegenüber stehenden Kathete c und dem Winkel B: fällt C nahe $0°$ aus, so setze man $tg\,x = sin\,B\,cos\,c$, dann ist

$$\sqrt{\frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}} = \sqrt{\frac{1-cos\,C}{1+cos\,C}} = tg\,\tfrac{1}{2}C,$$

und wegen 170) $= \sqrt{tg\,(45° - x)}$. Ferner erhält man B aus C und c, wo, wenn B nahe $90°$ ist, entweder $tg\,x = \frac{cos\,C}{cos\,c}$, $tg\,y = \sqrt{tg\,(45° - x)}$ zu nehmen ist, so fällt dann $B = 90° \pm 2y$ aus; oder man bestimme x aus der Formel $tg\,x = \sqrt{tg\,\frac{1}{2}(C+c)\,tg\,\frac{1}{2}(C-c)}$, so ist wieder $B = 90° \pm 2x$. Endlich erhält man aus den Winkeln B, C die Kathete c, wobei man, wenn c nahe $90°$ ist, setzen wird $tg\,x = \frac{cos\,C}{sin\,B}$, und man erhält

$$tg\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1-cos\,c}{1+cos\,c}} = \sqrt{\frac{sin\,B - cos\,C}{sin\,B + cos\,C}}$$
$$= \frac{tg\,[\frac{1}{2}(B+C) - 45°]}{tg\,[\frac{1}{2}(B-C) - 45°]}. \qquad 622)$$

Die Gleichung 616) bestimmt aus der Kathete und dem anliegenden Winkel die Hypothenuse, oder aus dieser und jenem die Kathete, oder endlich aus der Hypothenuse und einer Kathete den anliegenden Winkel. Ist die Bestimmung von B durch den Kosinus ungenau, so berechne man

$$tg\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{1-cos\,B}{1+cos\,B}} = \sqrt{\frac{tg\,a - tg\,c}{tg\,a + tg\,c}} = \sqrt{\frac{sin\,(a-c)}{sin\,(a+c)}} \qquad 623)$$

oder man setze $tg\,x = \frac{tg\,c}{tg\,a}$, dann ist $tg\,\frac{1}{2}B = \sqrt{tg(45°-x)}$.

Die Gleichung 617) gibt aus den zwei Winkeln die Hypothenuse, oder aus dieser und dem einen Winkel, den andern Winkel. Fällt a sehr klein aus, so suche man a aus der Formel $tg\,\frac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{cos\,(B+C)}{cos\,(B-C)}}$: denn 624) es ist

$$tg^2\,\tfrac{1}{2}a = \frac{1-cos\,a}{1+cos\,a} = \frac{1-cot\,B\,cot\,C}{1+cot\,B\,cot\,C}, \quad = -\frac{cos\,(B+C)}{cos\,(B-C)}.$$

429. Bei einem schiefwinkligen sphärischen Dreiecke kann man der unmittelbaren Berechnung des gesuchten Stückes aus den gegebenen Stücken desselben auf einem doppelten Wege ausweichen: entweder durch die Transformation der gegebenen Formel in eine andere zur numerischen Berechnung bequemere, oder durch Zerlegung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks in zwei rechtwinklige. Man kann hiebei folgende sechs Fälle unterschieden: gegeben sind I. die drei Seiten des sphärischen Dreiecks, II. zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, III. zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel, IV. zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite, V. zwei Winkel mit der Zwischenseite, und VI. alle drei Winkel, und es kommt jetzt darauf an, die gefundenen Formeln nach den verschiedenen Größen die sie enthalten, auf diese Fälle so anzuwenden, daß man aus drei gegebenen Stücken immer ein viertes bestimmen kann.

430. Wenn drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks gegeben sind, so findet man irgend einen Winkel A aus der Formel 604), nämlich

$$cos\,A = \frac{cos\,a - cos\,b.\,cos\,c}{sin\,b\,sin\,c} \qquad 625)$$

Zur logarithmischen Berechnung eignen sich besser die

Formeln 608) und 609), je nachdem der gesuchte Winkel nahe an 90° oder aber sehr klein ausfällt. Setzt man $\cos\varphi = \cos b \cos c$, so wird in 624)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos\varphi}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + a) \sin \frac{1}{2}(\varphi - a)}{\sin b \sin c} \quad 626)$$

eine andere Transformation gibt für

$$\cot\varphi = \frac{\cos b \cos c}{\sin a}, \cos A = \frac{\sin(\varphi - a)}{\sin b \sin c \sin\varphi}. \quad 627)$$

Heißt β das Perpendikel auf die Seite b, und b_1, b_2 ihre beiden Abschnitte, so ist nach 612)

$\cos c = \cos b_1 \cos\beta$, und $\cos a = \cos b_2 \cos\beta$, woraus $\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos b_2}{\cos b_1}$, also $\frac{\cos a - \cos c}{\cos a + \cos c} = \frac{\cos b_2 - \cos b_1}{\cos b_2 + \cos b_1}$ hervorgeht: dieß gibt nach 173)

$tg \frac{1}{2}(a+c)\, tg \frac{1}{2}(a-c) = tg \frac{1}{2}(b_2 + b_1)\, tg \frac{1}{2}(b_2 - b_1)$

oder wegen $b_2 + b_1 = b$, wird

$$tg \tfrac{1}{2}(b_2 - b_1) = tg \tfrac{1}{2}(a+c)\, tg \tfrac{1}{2}(a-c)\, \cot \tfrac{1}{2} b \quad 628)$$

Hieraus erhält man $b_1 = \frac{1}{2} b - \frac{1}{2}(b_2 - b_1)$

$b_2 = \frac{1}{2} b + \frac{1}{2}(b_2 - b_1)$, und nach 616) $\cos A = tg\, b_1 \cot c$ endlich nach 614) das Perpendikel β aus der Formel $\sin\beta = \sin A \sin c$, oder statt $\sin A$ dessen Werth aus 611) gesetzt, wird

$$\sin\beta = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}{\sin b} \quad 629)$$

Bezeichnet man noch die Abschnitte des Winkels B mit B_1 und B_2, so gibt die Formel 616)

$\cos B_1 = \cot c\, tg\beta$, $\cos B_2 = \cot a\, tg\beta$, sonach

$\frac{\cos B_1}{\cos B_2} = \frac{tg\, a}{tg\, c}$, und $\frac{\cos B_1 - \cos B_2}{\cos B_1 + \cos B_2} = \frac{tg\, a - tg\, c}{tg\, a + tg\, c}$, oder

$tg \frac{1}{2}(B_2 - B_1)\, tg \frac{1}{2}(B_2 + B_1) = \frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}$, woraus

$tg \frac{1}{2}(B_2 - B_1) = \frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)} \cot \frac{1}{2} B$, und wegen 610)

$$tg\tfrac{1}{2}(B_2-B_1)=\frac{sin(a-c)}{sin(a+c)}\sqrt{\frac{sin\,s\,sin(s-b)}{sin(s-a)\,sin(s-c)}} \quad 630)$$

folgt. Hieraus findet man $B_1=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}(B_2-B_1)$ und

$$B_2=\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}(B_2-B_1)$$

431. Aus den gegebenen zwei Seiten a, b, und dem Zwischenwinkel C, findet man die Seite c nach der Formel 604)

$cos\,c=cos\,a\,cos\,b+sin\,a\,sin\,b\,cos\,C$ μ) : wegen 93) und 94) wird hieraus

$$cos\,c=\tfrac{1}{2}cos(a+b)+\tfrac{1}{2}cos(a-b)+\tfrac{1}{2}cos(a-b)\,cos\,C-\tfrac{1}{2}cos(a+b)\,cos\,C,$$

und bei wiederhohlter Anwendung derselben Formeln erhält man

$$cos\,c=\tfrac{1}{2}cos(a+b)+\tfrac{1}{2}cos(a-b)+\tfrac{1}{4}cos(C+a-b)+\tfrac{1}{4}cos(C-a+b)-\tfrac{1}{4}cos(C+a+b)-\tfrac{1}{4}cos(a+b-C) \quad 631)$$

welche Formel zur Rechnung mit natürlichen goniometrischen Linien geeignet ist.

Setzt man in der Formel μ) statt $cos\,C$ seinen Werth $1-2sin^2\frac{1}{2}C$, so erhält man

$$cos\,c=cos\,a\,cos\,b+sin\,a\,sin\,b-2sin\,a\,sin\,b\,sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$=cos(a-b)-2sin\,a\,sin\,b\,sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$=\left(1-\frac{2sin\,a\,sin\,b\,sin^2\frac{1}{2}C}{cos(a-b)}\right)cos(a-b),\text{ daher für}$$
$$tg\,\varphi=\frac{2sin\,a\,sin\,b\,sin^2\frac{1}{2}C}{cos(a-b)},\text{ wird}$$
$$cos\,c=(1-tg\,\varphi)\,cos(a-b),\text{ da aber}$$
$$1-tg\varphi=\frac{cos\,\varphi-sin\varphi}{cos\,\varphi}=\frac{cos(45^\circ+\varphi)}{cos\,\varphi}\sqrt{2}\text{ ist, so folgt}$$
$$cos\,c=\frac{cos(a-b)\,cos(45^\circ+\varphi)\sqrt{2}}{cos\,\varphi} \quad 632)$$

Um die beiden andern Winkel unabhängig von c zu berechnen, hat man nach 606)

$$\cot B = \frac{\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C}{\sin b \sin C}$$

$$= \frac{\sin(a-b) + 2\cos a \sin b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\sin b \sin C}, \text{ also für}$$

$$tg\,\varphi = \frac{2\cos a \sin b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\sin(a-b)}, \text{ wird}$$

$$\cot B = \frac{\sin(a-b)\sin(45^\circ + \varphi)\sqrt{2}}{\sin b \sin C \cos \varphi} \quad 633)$$

Oder man setze $tg\,\varphi = \cos C\, tg\, a$, so ist

$$\cos c = \frac{\cos a \sin(b+\varphi)}{\sin \varphi}, \text{ und für} \quad 634)$$

$\cos \varphi = tg\, b \cos C$, wird $\cot B = -\frac{\cos(a+\varphi)}{\cos \varphi\, tg\, C}$ 635)

Zieht man das Perpendikel β, so ist

$tg\, b_2 = tg\, a \cos C$, $\cos \beta = \frac{\cos a}{\cos b}$, und $tg\,\beta = \sin b_2\, tg\, C$

hieraus folgt $b_1 = b - b_2$, $\cos c = \cos b_1 \cos \beta$, und 636)

$$tg\, A = \frac{tg\,\beta}{\sin b} = \frac{\sin b_2\, tg\, C}{\sin b_1} \quad 637)$$

der Winkel B ergibt sich nach der Formel 605).

432. Wenn man in 608) und 609) A mit B verwechselt, so erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}, \quad \sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}}$$

mittelst dieser und der eben genannten Formeln findet man

$$\cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin s}{\sin c} \sin \tfrac{1}{2} C$$

ferner $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B = \frac{\sin(s-c)}{\sin c} \sin \frac{1}{2} C$, und wenn man die Summe und Differenz dieser Ausdrücke bestimmt, erhält man

$\cos \frac{1}{2}(A-B) \sin c = \sin \frac{1}{2} C\,[\sin s + \sin(s-c)]$, und

$\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin c = \sin\frac{1}{2}C[\sin s - \sin(s-c)]$: nun ist 95)

$\sin s + \sin(s-c) = 2\sin(s-\frac{1}{2}c)\cos\frac{1}{2}c = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c$,

und

$\sin s - \sin(s-c) = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}c$; daher wird mit Rücksicht auf die Formel 101)

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C, \text{ und} \quad 638)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C \quad 639)$$

Bildet man aber aus den Ausdrücken für

$\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}B$, die Produkte

$\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$, und $\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$, so gibt ihre Summe und Differenz beziehungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin c = \cos\tfrac{1}{2}C[\sin(s-a)+\sin(s-b)]$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin c = \cos\tfrac{1}{2}C[\sin(s-b)-\sin(s-a)]$$

woraus auf eine ähnliche Art folgt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C \quad 640)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C \quad 641)$$

welche vier Gleichungen nach ihrem Erfinder **Delambre** benannt werden. Aus ihnen folgt unmittelbar

$$tg\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C \quad 642)$$

$$tg\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C \quad 643)$$

$$tg\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}tg\tfrac{1}{2}c \quad 644)$$

$$tg\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}tg\tfrac{1}{2}c \quad 645)$$

und diese letzteren sind unter dem Namen der **Neper**'schen **Analogien** längst bekannt: sie dienen aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel eines sphärischen Dreiecks die beiden übrigen Winkel, und aus zwei Winkeln und der Zwischenseite die übrigen Seiten logarithmisch zu bestimmen. Man erhält nämlich mittelst der Formeln 642)

und 643) sowohl $A+B$, als auch $A-B$, sonach wird $A=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B)$, $B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)$.

433. Wenn zwei Seiten a, c und ein gegenüberstehender Winkel C gegeben sind, so findet man den Winkel A mittelst der Gleichung 605), und hierauf ergibt sich durch die Neper'schen Analogien

$$\left.\begin{aligned} tg\,\tfrac{1}{2}B &= \frac{cos\,\frac{1}{2}(a-c)}{cos\,\frac{1}{2}(a+c)}\,cot\,\tfrac{1}{2}(A+C) \\ \text{oder}\quad tg\,\tfrac{1}{2}B &= \frac{sin\,\frac{1}{2}(a-c)}{sin\,\frac{1}{2}(a+c)}\,cot\,\tfrac{1}{2}(A-C) \end{aligned}\right\} \quad 646)$$

Die Formel 606) $cos\,B\,cos\,a+cot\,C\,sin\,B=cot\,c\,sin\,a$ gibt für $cot\,\varphi=\frac{cot\,C}{cos\,a}$, den Ausdruck

$$sin\,(B+\varphi)=cot\,c\,tg\,a\,sin\,\varphi \qquad 647)$$

Die dritte Seite findet man nach der Regel der Sinus 605).

Fällt man aber das Perpendikel β, so ist erstlich nach 616) $tg\,b_2=cos\,C\,tg\,a$, und nach 617) $cot\,B_2=cos\,a\,tg\,C$, hieraus ergibt sich wegen 612) $cos\,\beta=\frac{cos\,a}{cos\,b_2}$, ferner wegen 613) $tg\,\beta=cos\,B_2\,tg\,a$, und wegen 612) $cos\,b_1=\frac{cos\,c}{cos\,\beta}=\frac{cos\,c.\,cos\,b_2}{cos\,a}$, endlich nach 616) $cos\,B_1=cot\,c\,tg\,\beta=\frac{cos\,B_2\,tg\,a}{tg\,c}$: hiedurch erhält man $b=b_1+b_2$, $B=B_1+B_2$.

434. Aus den gegebenen zwei Winkeln A, C und der gegenüber liegenden Seite c findet man mittelst der Formel 605) die Seite a: ist diese von 90° wenig verschieden, so nehme man

$tg\,x=\frac{sin\,c\,sin\,A}{sin\,C}$, $tg\,y=\sqrt{tg\,(45°-x)}$, so wird $a=90°\pm 2y$. Hat man die Seite a bestimmt, so ergibt sich der dritte Winkel aus 646). Man setze in der Formel

$$\cos A \cos b - \cot c \sin b = -\cot C \sin A$$

$\cot \varphi = \frac{\cot c}{\cos A}$, so wird

$$\sin(b - \varphi) = \cot C \operatorname{tg} A \sin \varphi \qquad 648)$$

woraus die Seite b hervorgeht.

Um den dritten Winkel unabhängig von a zu bestimmen, nehme man $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cot A}{\cos c}$, so wird

$$\sin(B - \varphi) = \frac{\cos C \sin \varphi}{\cos A}. \qquad 649)$$

Fällt man das Perpendikel β, so hat man $\operatorname{tg} b_1 = \cos A \operatorname{tg} c$, $\cot B_1 = \cos c \operatorname{tg} A$, und hiedurch $\cos \beta = \frac{\cos A}{\sin B_1}$, $\operatorname{tg} \beta = \sin b_1 \operatorname{tg} A$, ferner

$$\sin b_2 = \cot C \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin b_1 \operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C},$$

$$\sin B_2 = \frac{\cos C}{\cos \beta} = \frac{\sin B_1 \cos C}{\cos A}, \text{ endlich}$$

$$b = b_1 + b_2, \; B = B_1 + B_2$$

435. Aus den gegebenen Winkeln A, B und der Zwischenseite c ergibt sich mittelst der Formel 607) für den Winkel C der Ausdruck

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \qquad \varrho)$$

welcher sich nach 93) und 94) in

$$\cos C = -\tfrac{1}{2}\cos(A+B) - \tfrac{1}{2}\cos(A-B) + \tfrac{1}{4}\cos(c+A-B) + \tfrac{1}{4}\cos(c-A+B) - \tfrac{1}{4}\cos(c+A+B) - \tfrac{1}{4}\cos(A+B-c) \qquad 650)$$

verwandelt, und zur Rechnung mit natürlichen goniometrischen Linien bequem ist. Eine andere Transformation erhält man, wenn man in der Formel ϱ) $1 - 2\sin^2 c$ statt $\cos c$ setzt, hiedurch wird

$$\cos C = -\cos(A+B) - 2 \sin A \sin B \sin^2 \tfrac{1}{2} c,$$

macht man also

$$\frac{2\sin A \sin B \sin^2 \frac{1}{2} c}{\cos(A+B)} = tg\,\varphi$$

so wird

$$\cos C = -\cos(A+B)[1-tg\,\varphi]$$
$$= -\frac{\cos(A+B)\cos(45^\circ-\varphi)\sqrt{2}}{\cos\varphi} \quad 651)$$

Man kann auch $\frac{\cot B}{\cos c} = tg\,\varphi$ setzend, C aus der Formel

$\cos C = \frac{\cos B \sin(A-\varphi)}{\sin\varphi}$ bestimmen. 652)

Die Neper'schen Analogien geben

$tg\,\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\,tg\,\frac{1}{2}c$, und

$tg\,\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\,tg\,\frac{1}{2}c$; woraus

$a = \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$, und $b = \frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$

hervorgeht. Oder man setze $tg\,\varphi = \frac{2\cos A \sin B \sin^2\frac{1}{2}c}{\sin(A+B)}$

so wird $\cot b = \frac{\sin(A+B)\sin(45^\circ-\varphi)\sqrt{2}}{\sin B \sin c \cos\varphi}$. 653)

Kürzer ist die Rechnung, wenn man $tg\,\varphi = tg\,B\cos c$ macht, da dann $\cot b = \frac{\sin(A+\varphi)}{\sin\varphi\, tg\, c}$ ausfällt. 654)

Fällt man das Perpendikel β, so hat man

$\cot B_1 = tg\,A\cos c$, $\cos\beta = \frac{\cos A}{\sin B}$, $tg\,\beta = \cos B_1\, tg\, c$

hiedurch ergibt sich $\sin B_2 = \frac{\cos C}{\cos\beta}$, $tg\,a = \frac{tg\,\beta}{\cos B_2}$, endlich

$B = B_1 + B_2$.

436. Um aus drei gegebenen Winkeln die Seiten zu bestimmen vertausche man in den Formeln 608) bis 611)

a, b, c, A mit

$\pi - A, \pi - B, \pi - C, \pi - a$

so hat man sogleich

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B.\sin C}},\ \text{wo } S=\tfrac{1}{2}(A+B+C) \quad 655)$$

ist, ferner

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}} \quad 656)$$

$$tg\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}},\ \text{endlich} \quad 657)$$

$$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\sin B\sin C} \quad 658)$$

Macht man aber in 607) $\cos\varphi = \cos B\cos C$, so entsteht

$$\cos a = \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+\varphi)\cos\frac{1}{2}(A-\varphi)}{\sin B\sin C}:$$ oder setzt man 659)

daselbst

$$\cot\varphi = \frac{\cos B\cos C}{\sin A},\ \text{so wird } \cos a = \frac{\sin(A+\varphi)}{\sin B\sin C\sin\varphi}. \quad 660)$$

Man fälle aus B auf die Seite b das Perpendikel β, so ist $\cos A = \sin B_1\cos\beta$, $\cos C = \sin B_2\cos\beta$, also

$$\frac{\cos A}{\cos C} = \frac{\sin B_1}{\sin B_2},\ \text{daher } \frac{\cos A-\cos C}{\cos A+\cos C} = \frac{\sin B_1-\sin B_2}{\sin B_1+\sin B_2},$$

oder

$tg\frac{1}{2}(A+C)\,tg\frac{1}{2}(A-C) = \cot\frac{1}{2}B\,tg\frac{1}{2}(B_2-B_1)$, also

$$tg\tfrac{1}{2}(B_2-B_1) = tg\tfrac{1}{2}(A+C)\,tg\tfrac{1}{2}(A-C)\,tg\tfrac{1}{2}B, \quad 661)$$

dieß gibt $B_1 = \frac{1}{2}B-\frac{1}{2}(B_2-B_1)$, $B_2 = \frac{1}{2}B+\frac{1}{2}(B_2-B_1)$ endlich nach 617) $\cos a = \cot B_2\cot C$.

437. Die Formeln, nach denen aus zwei Seiten und dem gegenüberliegenden Winkel, so wie aus zwei Winkeln und der gegenüberliegenden Seite die übrigen Bestandtheile eines sphärischen Dreiecks zu berechnen sind, haben eine Zweideutigkeit d. h. sie gestatten für die in der Frage stehenden Größen einen doppelten Werth. Nun gibt die Formel 641)

$$\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

und hieraus folgt, daß wenn $A > B$ ist, auch $a > b$ sein müsse, und umgekehrt, d. i. es liegt in einem jeden sphärischen Dreiecke dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber; sind also a, c, C gegeben, so muß immer der größere Werth von b mit dem größeren Werth von B verbunden werden. Legt man durch die Spitze des Winkels B ein Perpendikel, so fällt es nur dann innerhalb des sphärischen Dreiecks, wenn die beiden anderen Winkel also auch die ihnen gegenüberstehenden Seiten gleichartig, d. h. beide zugleich spitz, oder zugleich stumpf sind: es ist daher, wenn a und c gleichartig sind, mit dem gefundenen b derjenige Werth von A zu verbinden, welcher mit dem gegebenen C gleichartig ist. Wenn hingegen a mit c ungleichartig ist, so hat man den mit B gleichartigen Werth von b mit demjenigen A zusammenzustellen, welches mit C ungleichartig ist. Sei z. B. $a = 79°.6667$, $c = 89.5$, $C = 22.0433$, so hat man, wenn E die dekadische Ergänzung der zugehörigen Zahl bezeichnet,

$l\sin a = 9.9929$
$l\sin C = 9.5744$
$E\, l\sin c = 0$
$l\sin A = 9.5673$

also $A = 21°.6684$ oder $A = 158.3316$

ferner ist nach 646)
$l\cos\frac{1}{2}(a-c) = 9.9984$
$l\cot\frac{1}{2}(A+C) = 10.3967$
$E.l\cos\frac{1}{2}(a+c) = 1.0250$
$l\,tg\frac{1}{2}B = 11.4201$, daher
$\frac{1}{2}B = 87°.8236$, und $B = 175.6472$

endlich hat man
$l\sin a = 9.9929$
$l\sin B = 8.8802$
$E\, l\sin A = 0.4327$
$l\sin b = 9.3058$; mithin $b = 11°.6667$ oder $168°.3333$

Da nun $B > 90°$ ist, so muß es auch b sein, und man hat $A = 21°.6684$, $B = 175°.6472$, $b = 168°.3333$.

438. Ein Streifen auf der Oberfläche einer Kugel, welcher durch zwei größte Kreise, die sich unter einem Winkel A schneiden, gebildet wird, ist derjenige Theil der Kugelfläche, den man erhält, wenn man 360° durch A dividirt: da aber diese $= 4r^2\pi$ beträgt, so ist der Inhalt des Streifens $= \frac{1}{90}A\,r^2\pi$, μ). Schneiden sich nun zwei größte Kreise PCQ, PDQ (Fig. 36) unter einem beliebigen Winkel P, und zieht man einen dritten größten Kreis CF, so entstehen die sphärischen Dreiecke PDC, DCQ, PEF, EFQ: es ist aber PD + DQ = 180°, PD + PE = 180°, also DQ = PE: und eben so CQ = PF, daher sind die Dreiecke DCQ, PEF, und aus gleichem Grunde auch die Dreiecke PDC und EQF einander gleich; man hat also wegen μ)
PDC + PEF = $\frac{1}{90}$P r²π ν). Auf der Halbkugel PDQEP sei irgend ein sphärisches Dreieck ABC, man verlängere in beiden Richtungen die Seiten desselben bis 180°, so entstehen im Scheitelpunkte eines jeden Winkels zwei Theile von Streifen, deren Inhalt aus ν) folgt, nämlich:

$$DAH + EAG = \tfrac{1}{90}A\,r^2\pi,$$
$$GBQ + HBP = \tfrac{1}{90}B\,r^2\pi$$
$$PCE + DCQ = \tfrac{1}{90}C\,r^2\pi;$$

die Summe dieser Gleichungen gibt offenbar die halbe Kugelfläche nebst dem doppelten Dreieck ABC einerseits, und
$\frac{1}{90}r^2\pi(A+B+C)$ andererseits, man hat also
$2ABC + 2r^2\pi = \frac{1}{90}r^2\pi(A+B+C)$, oder das sphärische Dreieck $ABC = \frac{1}{180}r^2\pi(A+B+C-180°)$ 662)

439. Der Himmel hat das Ansehen einer hohlen Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Beobachter einnimmt, und an deren innerer Fläche die Sterne gleichsam befestigt zu sein scheinen. Sie bewegt sich täglich von Osten nach Westen um eine fixe Axe, die Weltaxe, welche die Fläche des Himmels in zwei Punkten trifft, die man

Weltpole nennt, wovon der in unseren Gegenden sichtbare der nördliche, und der entgegengesetzte uns unsichtbare, der südliche Pol heißt. Ein von beiden Polen gleich weit abstehender Kreis, theilt den Himmel in zwei gleiche Theile, in die nördliche und südliche Hemisphäre, und wird Aequator genannt. Die Richtung der Schwere in dem Orte des Beobachters trifft verlängert die Himmelsfläche in zwei Punkten, dem ober uns sichtbaren das Zenith, und dem entgegengesetzten unsichtbaren das Nadir: der von beiden gleich weit abstehende Kreis theilt die uns in jedem Augenblicke sichtbare Hälfte des Himmels von der uns unsichtbaren ab, und heißt Horizont. Der durch die Weltpole und das Zenith gezogene größte Kreis steht auf dem Aequator und dem Horizonte senkrecht, und heißt Meridian, sein Durchschnitt mit dem Horizonte die Mittagslinie, deren Endpunkte, und zwar jener in der südlichen Hemisphäre gelegene der Südpunkt, der entgegengesetzte der Nordpunkt, genannt werden: der Durchschnitt des Aequators mit dem Horizonte bezeichnet zwei andere Punkte, wovon der eine auf der Ostseite des Himmels sich befindet, und Ostpunkt der entgegengesetzte der Westpunkt heißt. Man bemerkte sehr früh, daß die Sonne nebst der täglichen Bewegung von Ost nach West, welche sie mit allen Gestirnen gemein hat, noch in einer eigenen Bewegung in einem Kreise fortzurücken scheint, welcher den Aequator halbirt: dieser größte Kreis, an der Himmelsfläche oder die scheinbare Bahn der Sonne, heißt die Ekliptik: sie durchschneidet den Aequator in zwei Punten, die man Aequinoktialpunkte oder die Punkte der Nachtgleichen nennt, deren jener, von welchem die Sonne sich in die nördliche Hemisphäre erhebt, der Frühlingspunkt, der entgegengesetzte der Herbstpunkt heißt.

440. Sei PHNR (Fig. 37) der Meridian, HR der Horizont, Z das Zenith des Beobachters, AQ der Aequator, P der Nordpol, CE die Ekliptik, G ihr Pol, C der Frühlingspunkt und S irgend ein Himmelskörper, durch welchen man sich drei größte Kreise ZSF, PSD, GSB gezogen vorstellt, welche beziehungsweise auf dem Horizont, auf dem Aequator und auf der Ekliptik senkrecht stehen; so kann man seine Lage am Himmel auf dreierlei Art festsetzen: entweder durch die Bogen HF, FS, oder durch die Bogen CD, SD, oder endlich durch die Bogen BC und SB, man nennt diese Bogenpaare beziehungsweise Azimuth und Höhe des Sterns, oder Rektascension und Deklination, oder endlich Länge und Breite desselben. Die Ergänzungen des Azimuthes, der Höhe und der Deklination zu 90 Graden heißen beziehungsweise Morgen oder Abendweite, Zenithdistanz, Poldistanz des Sterns. Endlich nennt man den Winkel des Höhen- oder Scheitelkreises mit dem Meridian den Stundenwinkel des Sterns und den Winkel der Ekliptik mit dem Aequator die Schiefe der Ekliptik. Man bezeichne mit a das Azimuth, h die Höhe eines Sterns S, mit α die Rektascension, δ die Deklination, mit λ die Länge, β die Breite desselben, ferner sei t der Stundenwinkel, p die Höhe des Nordpols oder die Polhöhe, und ε die Schiefe der Ekliptik; so hat man in dem sphärischen Dreiecke PZS nach 604)

$$\cos ZS = \cos PZ \cos PS + \sin PZ \sin PS \cos ZPS, \text{ oder}$$
$$\sin h = \sin p \sin \delta + \cos p \cos \delta \cos t, \text{ welcher} \quad 663)$$

Ausdruck zeigt, daß bei unveränderlicher Deklination zu gleichen Höhen auf beiden Seiten des Meridians gleiche Stundenwinkel gehören, daß ferner die größte Höhe eines Sterns im Meridiane, wo $t = o$ ist, Statt hat, weil

$\cos t$ am größten wird, wenn t verschwindet: man hat dann $\sin h = \sin p \sin \delta + \cos p \cos \delta = \cos(p - \delta)$, daher ist $h = 90° - p + \delta$. Ist $h = 0$, so ist der Stern 664) im Horizont, er geht auf oder unter, und für diesen Augenblick hat man $\cos t = -tg\, p\, tg\, \delta$ 665)

man nennt einen solchen Stundenwinkel den halben Tagebogen des Sterns: wird die Zeit τ berechnet welche der Stern braucht, um diesen halben Tagebogen zu durchlaufen, indem man schließt 360: $\frac{1}{2}$ Tagebogen = Umlaufszeit des Sterns: τ, so gibt diese Zeit τ von der Zeit des Durchganges durch den Meridian subtrahirt, oder dazu addirt, die Zeit seines Auf- und Unterganges.

441. Setzt man $ZS = k$, $ZP = m$, $PS = n$ und $\frac{1}{2}(k + m + n) = s$, so erhält man nach 609)

$$\sin \tfrac{1}{2} ZPS = \sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin(s - m) \sin(s - n)}{\sin m . \sin n}} \quad 666)$$

oder wenn $\frac{1}{2} t$ nahe an 90° ausfällt, so ist nach 608)

$$\cos \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - k)}{\sin m \sin n}}$$: und eben so hat man

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} PZS = \cos \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{\sin(s - k) \sin(s - m)}{\sin k \sin m}}, \\ \text{oder wenn } \tfrac{1}{2} a \text{ klein ist} \quad & \\ \sin \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - n)}{\sin k \sin m}} \end{aligned}\right\} \quad 667)$$

mittelst welcher Formeln man aus der bekannten Polhöhe eines Orts, aus der Deklination der Sonne und ihrer wahren Höhe, sowohl die wahre Sonnenzeit, als auch das Azimuth für den Augenblick der beobachteten Sonnenhöhe finden kann: endlich ist im Dreiecke PZS $\sin \delta = \sin p \sin h + \cos p \cos h \sin \alpha$ also für $h = 0$,

$$\sin \text{Morgenweite} = \sin \delta : \cos p. \quad 668)$$

Hat man z. B. an einem Orte, dessen Polhöhe 48°.208

ist, die wahre Sonnenhöhe von 40°.472 zu einer Zeit beobachtet, da ihre Deklination 15°.047 betrug, so steht die Rechnung so:

k=49°.528		E.$l\sin$k=	0.1188
m=41.792	E.$l\sin$m= 0.1763	E.$l\sin$m=	0.1763
n=74.953	E.$l\sin$n= 0.0152		
2s=166.273			
s= 83.136		$l\sin$s=	9.9968
s—m= 41.344	$l\sin$(s—m)= 9.8199		
s—n= 8.183	$l\sin$(s—n)= 9.1533	$l\sin$(s—n)=	9.1533
	Summe =19.1647		19.4452
	½ Summe = 9.5823 = $\sin\frac{1}{2}$t		7.7226
			= $l\sin\frac{1}{2}$a

Es ist also t = 44°.945, a = 63°.734, oder wenn man den Bogen in Zeit verwandelt, indem man die ganzen Grade mit 15 dividirt, und ihre Dezimaltheile mit 4 multiplizirt, erhält man t = 2ᵘ 59′.78: hat also die Beobachtung Vormittags Statt gefunden, so war die wahre Sonnenzeit 12ᵘ — 2ᵘ 59′.78 = 9ᵘ0′.22; hat man aber im Augenblicke der genommenen Sonnenhöhe die Richtung des Schattens angezeichnet, welche ein frei hängendes Loth auf einer horizontalen Ebene bildet, und sodann nach vollzogener Berechnung auf der verzeichneten Geraden einen Winkel von 63°.734 gegen Osten errichtet, so ist die letzt gezogene Gerade die **Mittagslinie des Beobachtungsortes.**

442. Differenzirt man die Formel 663), indem man einmahl δ und ein zweites Mahl h als konstant betrachtet, so erhält man

$$dh = -\frac{\cos p \cos\delta \sin t\, dt}{\cos h}, \text{ und} \qquad 669)$$

$$dt = d\delta\left(\frac{tg\,p}{\sin t} - \frac{tg\,\delta}{tg\,t}\right), \text{ woraus hervorgeht, daß die} \qquad 670)$$

Bestimmung der Zeit aus einer einzigen beobachteten

Höhe am genauesten wird, wenn man das Gestirn hiezu so wählt, daß $t = 90°$ wodurch auch $a = 90°$ wird, nämlich, wenn man die Beobachtung im ersten Vertikalkreise anstellt: daß ferner bei korrespondirenden Sonnenhöhen eine Korrektion wegen der geänderten Deklination der Sonne vorzunehmen ist, um hieraus die Zeit des wahren Mittags zu finden. Heißt also T die Zeit der vormittägigen Beobachtung und J die Zeit zwischen den beiden Beobachtungen, da die Sonne eine gleiche Höhe hatte, so ist wenn man die Korrektion in Minuten bestimmt, mithin den Ausdruck 670) mit 4 multiplizirt, der wahre Mittag

$$= T + \tfrac{1}{2} J + 2 d\delta \left(\frac{tg\, p}{sin\, t} - \frac{tg\, \delta}{tg\, t} \right) \qquad 671)$$

Z. B. An einem Orte dessen Polhöhe 54°.684 ist, hat man um 10^u 33.45 eine Sonnenhöhe gemessen, und die Uhr zeigte bei derselben Höhe Nachmittags 2^u 6'.73, also $J = 3^u\ 33'.28 = 53°.32 = 2\,t$: die Abweichung der Sonne war zur Zeit der gemessenen Höhen 14°.557 und 14°.602, also $d\delta = -0.045$

$$l\, tg\, p = 10.1497 \qquad l\, tg\, \delta = 9.4145$$
$$l\, sin\, t = 9.6519 \qquad l\, tg\, t = 9.7007$$
$$0.4978 = l\, 3.146 \qquad 9.7138 = l\, 0.517$$

nun ist $3.146 - 0.517 = 2.629$, und

$$l\, 2.629 = 0.4199$$
$$l\, 2\, d\delta = l\, 0.090 = 0.9542 - 2$$
$$0.3741 - 1 = l\, 0.237$$

Die Uhrzeit der vormittägigen Beobachtung

	$T = 10^u$	33'.45
vermehrt um	$\frac{1}{2} J =$ 1	46.64
gibt	12	20.09
Korrektion	—	0.24
wahre Mittag	12	19.85

443. Verbindet man S mit C durch den Bogen eines größten Kreises, und setzt $CS = D$, $DCS = x$, also $BCS = x - \varepsilon$, so ist im Dreiecke CSD

$\cos CS = \cos CD . \cos DS$, oder $\cos D = \cos\alpha \cos\delta$, ferner

$tg\, DCS = \frac{tg\, DS}{\sin CD}$, oder $tg\, x = \frac{tg\,\delta}{\sin\alpha}$; dann hat man

$tg\, BC = \cos BCS\, tg\, CS$ d. i. $tg\,\lambda = \cos(x - \varepsilon)\, tg\, D$, 672)

und $\sin BS = \sin BCS \sin CS$ d. i. $\sin\beta = \sin(x - \varepsilon)\sin D$ 673)

Setzt man ferner $BCS = y$, so folgt,

$\cos CS = \cos BC . \cos BS$, oder $\cos D = \cos\lambda \cos\beta$,

$tg\, BCS = \frac{tg\, BS}{\sin BC} = \frac{tg\,\beta}{\sin\lambda} = tg\, y$, hiedurch wird

$tg\, CD = tg\, CS \cos DCS$, oder $tg\,\alpha = tg\, D \cos(y + \varepsilon)$ 674)

$\sin DS = \sin CS \sin DCS$, oder $\sin\delta = \sin D \sin(y + \varepsilon)$ 675)

mittelst welcher Formeln man die Rektascension und Deklination eines Gestirns in dessen Länge und Breite und umgekehrt verwandeln kann.

Man vergl. Johann v. Sniadetzki's sphärische Trigonometrie. A. d. Poln. übs. von L. Feldt. Leipz. 1828.

V. Gleichungen einer Geraden im Raume.

444. Die Lage einer Geraden im Raume wird durch die Lage zweier ihrer Projektionen auf die koordinirten Ebenen vollständig bestimmt: denn führt man durch beide gegebenen Projektionen Ebenen, die den koordinirten Ebenen parallel laufen, daher auf den beiden Projektionsebenen beziehungsweise senkrecht stehen, so geht (416) jede derselben durch die gesuchte Gerade, die sonach der gemeinschaftliche Durchschnitt jener Ebenen sein muß. Nimmt man die Projektionen einer Geraden im Raume als in den Ebenen xz, und yz enthalten an, und bestimmt sie durch die Gleichungen

$$x = az + g, \quad y = a'z + g' \quad \lambda)$$

wo a, a' die Tangenten der Winkel vorstellen, welche zwischen den genannten Projektionen und der Axe der z eingeschlossen sind, so bezeichnen beide Gleichungen im Zusammenhange die Lage der zugehörigen Geraden im Raume. Ihre Projektion auf die Ebene xy zu finden, substituire man den Werth von z aus der ersten der beiden Gleichungen in die zweite, und man erhält

$y = a'\left(\frac{x-g}{a}\right) + g'$, oder wenn man zur Abkürzung

$\frac{a'}{a} = a'', g' - \frac{a'g}{a} = g''$ setzt, so wird ihre Gleichung

$y = a''x + g''$.

445. Soll diese Gerade durch zwei Punkte gehen, deren Koordinaten x', y', z' und x'', y'', z'' sind, so hat man erstlich $x' = az' + g, y' = a'z' + g'$ $\mu)$, daher entsteht durch Subtraktion von $\lambda)$ und $\mu)$

$x - x' = a(z - z')$, und $y - y' = a'(z - z')$ $\nu)$: ferner ist $x'' = az'' + g$, $y'' = a'z'' + g'$ $\varrho)$, also $\varrho)$ von $\mu)$ abgezogen gibt

$x' - x'' = a(z' - z'')$, $y' - y'' = a'(z' - z'')$; hieraus ergibt sich $a = \frac{x' - x''}{z' - z''}, a' = \frac{y' - y''}{z' - z''}$, und wenn man diese Werthe in $\nu)$ substituirt, erhält man die Gleichungen der gesuchten Geraden

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \text{ und } y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z') \quad 676)$$

Die Entfernung jener beiden Punkte der Geraden ergibt sich nach 594).

446. Wenn zwei nicht parallelen Geraden im Raume einander nicht schneiden, so ist der Winkel V unter welchem sie gegen einander geneigt sind, gleich dem

Winkel, welchen die durch den Anfangspunkt der Koordinaten ihnen beziehungsweise parallel gezogenen Linien einschließen. Die Gleichungen jener Geraden seien nun

$$x = az + g, \quad y = a'z + g', \text{ und}$$
$$x = bz + h, \quad y = b'z + h'$$

so sind die Gleichungen der ihnen parallelen Linien, da sie durch den Anfangspunkt gehen

$$x = az, \; y = a'z, \text{ und } x = bz, \; y = b'z \quad \sigma)$$

Nimmt man auf jeder dieser beiden Linien einen Punkt, dessen Koordinaten x', y', z' und x'', y'', z'' sein mögen, und verbindet diese Punkte mittelst einer Geraden, deren Länge nach 594)

$$D = \sqrt{[(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2]}$$

ist, so schließt diese Gerade mit den Radienvektoren ihrer Endpunkte r', r'' ein Dreieck ein, aus welchem der Winkel V nach 429) sich bestimmen läßt, es ist nämlich

$\cos V = \frac{r'^2 + r''^2 - D^2}{2 r' r''}$, oder wenn man statt r', r'' ihre Werthe aus 590) setzt, wird

$$\cos V = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{r'r''} \qquad 677)$$

es ist aber den Gleichungen σ) gemäß

$x' = az'$, $y' = a'z'$, und $x'' = bz''$, $y'' = b'z''$, τ)

sonach wird

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = z'z''(1 + ab + a'b')$$

$r' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)} = z'\sqrt{(1 + a^2 + a'^2)}$, und

$r'' = z''\sqrt{(1 + b^2 + b'^2)}$: hiedurch verwandelt sich die Gleichung 677) in

$$\cos V = \frac{1 + ab + a'b'}{\sqrt{(1+a^2+a'^2)(1+b^2+b'^2)}} \qquad 678)$$

Hieraus folgt

$\sin^2 V = 1 - \frac{(1 + ab + a'b')^2}{(1+a^2+a'^2)(1+b^2+b'^2)}$, und wenn

man gehörig reducirt

$$\sin V = \sqrt{\frac{(a-b)^2+(a'-b')^2+(ab'-a'b)^2}{(1+a^2+a'^2)(1+b^2+b'^2)}} \quad 679)$$

ferner ist

$$tg\,V = \frac{\sqrt{[(a-b)^2+(a'-b')^2+(ab'-a'b)^2]}}{1+ab+a'b'}. \quad 680)$$

447. Wenn zwei Linien senkrecht auf einander stehen, so ist der Kosinus des von denselben eingeschlossenen Winkels null, man hat daher

$$1+ab+a'b'=0 \quad 681)$$

die Bedingungsgleichung des Senkrechtstehens zweier Geraden. Sind aber beide Linien einander parallel, so ist 679) $\sin V = 0$, dieß gibt

$$(a-b)^2+(a'-b')^2+(ab'-a'b)^2=0$$

eine Gleichung, welcher nicht anders Genüge geschieht, als wenn $a=b$, und $a'=b'$ angenommen wird. Ist endlich die eine dieser Linien die Axe der x selbst, deren Gleichungen $y''=0$, $z''=0$ sind, so hat man aus den Gleichungen τ) $z''=\frac{x''}{b}$, und $y''=\frac{b'x''}{b}$, welche für jeden Werth von x null werden, wenn $\frac{1}{b}=0$, und $\frac{b'}{b}=0$ d. i. wenn $b=\infty$, ist: dividirt man aber in dem Ausdrucke 678) Zähler und Nenner durch b, und setzt dann $b=\infty$, so wird

$$\cos V = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+a'^2)}} = \cos\alpha. \quad 682)$$

Eben so findet man, wenn β, γ die Winkel bedeuten, unter welchen die Gerade gegen die Axe der y und z geneigt ist,

$$\cos\beta = \frac{a'}{\sqrt{(1+a^2+a'^2)}},\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+a'^2)}} \quad 683)$$

Sind nebstdem die Winkel derselben Geraden mit der

Ebene xy, xz, yz beziehungsweise Z, Y, X so ergänzen sie die Winkel α, β, γ zu 90°: denn es ist (Fig. 31) MAB der Neigungswinkel der Geraden AM gegen die Ebene xy, MAB = Z, und da AZ senkrecht auf xy ist, so hat man MAZ oder $\gamma = 90° - Z$, mithin ist $\cos\gamma = \sin Z$, und eben so ist

$$\cos\alpha = \sin X, \quad \cos\beta = \sin Y. \qquad 684)$$

Bezeichnet man aber durch α_2, β_2, γ_2 die Winkel der anderen Geraden mit den Axen der x, y, z, so hat man auch $x' = r'\cos\alpha$, $x'' = r''\cos\alpha_2$, also

$$x'x'' = r'r''\cos\alpha\cos\alpha_2,$$

und eben so

$$y'y'' = r'r''\cos\beta\cos\beta_2, \; z'z'' = r'r''\cos\gamma\cos\gamma_2,$$

hiedurch verwandelt sich die Formel 677) in

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 + \cos\gamma\cos\gamma_2 \qquad 685)$$

Sind die beiden Linien auf einander senkrecht, so ist $V = 90°$, $\cos V = 0$, und diese Formel wird

$$\cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 + \cos\gamma\cos\gamma_2 = 0 \qquad 686)$$

welchen Ausdruck man auch aus 601) erhält, wenn man statt a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 ihre Werthe $\cos\alpha_1$ $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_1$, $\cos\gamma_2$ substituirt.

VI. Flächen der ersten Ordnung.

448. Eine Fläche wird durch die Bewegung einer Linie im Raume erzeugt. Ist die beschreibende Linie eine Gerade, und die von der Lage einzelner Punkte in derselben abweichende Richtung ihrer Bewegung gleichfalls eine Gerade, so entsteht während ihrer Bewegung eine **ebene Fläche**: wofern aber die beschreibende Linie eine Kurve ist, oder aber der Lauf einer Geraden längst einer krummen Linie vor sich geht, so kommt immer eine **krumme Fläche** zum Vorschein. Man denke sich von einem beliebigen Punkte M (Fig. 38)

der Fläche BECD auf die gewählte Ebene XAY die Senkrechte LM, und von dem Punkte L eine andere LP auf die in dieser Ebene gewählte Abscissenlinie AX gefällt, so ist der Punkt M durch die Koordinaten $AP = x$, $PL = y$ und $LM = z$ völlig bestimmt. Dasselbe gilt auch von beliebigen anderen Punkten der nämlichen Fläche, welcher M angehört, weßhalb eine allgemeine zwischen x, y, z Statt habende Beziehung wie $z = f(x, y)$, oder $F(x, y, z) = 0$ als Gleichung der ganzen Fläche angesehen werden kann. Sollen Punkte der Fläche nach einer solchen Gleichung bestimmt werden, so hat man zwei Koordinaten ihrer Lage und Größe nach willkührlich anzunehmen, und den zugehörigen Werth der dritten hiernach zu berechnen. So ist die Gleichung einer Kugelfläche, deren Halbmesser $= 12$ wäre $z^2 + y^2 + x^2 = 144$, oder $z = \sqrt{[144 - (x^2 + y^2)]}$, und wenn für einen bestimmten Punkt $x = 7$, $y = 9$ gesetzt wird, so findet man

$z = \sqrt{(144 - 130)} = \sqrt{14} = \pm 3.741657 \ldots$; das doppelte Zeichen für z zeigt an, daß die Senkrechte aus L in zwei verschiedenen Richtungen genommen werden soll.

449. Wird in der gegebenen Gleichung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$, eine der veränderlichen Größen z. B. $z = 0$ gesetzt, so erhält man in dem Ausdrucke $F(x, y) = 0$ den Zusammenhang der beiden Koordinaten x und y in der Ebene xy, d. h. die Gleichung derjenigen Linie, in welcher die Fläche von dieser Ebene geschnitten wird. Eben so ergibt sich der analytische Ausdruck des Durchschnitts der Fläche und der Ebene yz, wenn $x = 0$, und derjenige für den Durchschnitt mit der Ebene xz, wenn $y = 0$ angenommen wird. Man nennt die sich so ergebenden Durchschnitte der Fläche, ihre *Hauptschnitte*, und es läßt sich aus ihnen die Beschaffenheit der Fläche

im Allgemeinen beurtheilen. Um diese aber näher zu erforschen, setze man x, y, z nach einander den konstanten Größen g, h, k gleich, wodurch man beliebig viele Durchschnitte der Fläche erhält. So wird z. B. wenn man für x den Werth $g = AP$ substituirt, die Gleichung $F(g, y, z) = o$, worin nur die veränderlichen Größen y, z vorkommen zur Gleichung der Kurve GHJ, welche der Durchschnitt der Fläche und einer in dem Abstande g der Ebene yz parallel gelegten Ebene ist: wäre hingegen $z = k = AQ$ gesetzt, so erhielte man in $F(x, y, k) = o$ den Ausdruck des Durchschnittes KMN durch eine der Ebene xy parallele Ebene

Man unterscheidet die Flächen in algebraische und transcendente, je nachdem die Gleichung welche ihre Beschaffenheit ausdrückt eine algebraische, oder aber eine transcendente Funktion der Größen x, y, z ist. Da jedoch durch die Aenderung des Koordinatensystems der Grad der Gleichung einer Fläche ungeändert bleibt, indem sämmtliche Ausdrücke für das Verhalten der drei Koordinaten in dem neuen Systeme gegen das vorige vom ersten Grade sind 595); so kann man die algebraischen Flächen nach dem Grade ihrer Gleichung in Ordnungen abtheilen.

450. Die Flächen der ersten Ordnung werden demnach durch die Gleichung $Ax + By + Cz + D = o$ 687) vorgestellt. Man nennt die Linien, in welchen eine Fläche die koordinirten Ebenen schneidet, die Knotenlinien derselben. So sind die Gleichungen der Knotenlinie der Fläche 687) in der Ebene xy

$$z = o, \quad Ax + By + D = o \qquad 688)$$

und da diese Gleichung einer geraden Linie angehört, welche die Axe der x unter einem Winkel, dessen Tan-

gente $-\frac{A}{B}$ ist, schneidet; so bilden die Flächen der ersten Ordnung mit der Ebenen xy, und eben so mit den übrigen koordinirten Ebenen, wie immer ihre Lage angenommen wird, Knotenlinien, welche stets gerade Linien sind; daher sind die Flächen der ersten Ordnung ebene Flächen.

451. Nimmt man eine Gerade OB (Fig. 35), welche eine fixe Gerade DE unter einem rechten Winkel halbirt, und läßt sie um DE als Axe umdrehen, so entsteht während dieser Bewegung eine Ebene, deren jeder Punkt von den zwei fixen Punkten D und E gleich weit absteht. Bezeichnet man die Koordinaten dieser Punkte mit h, i, k und h', i', k', und die Koordinaten irgend eines Punktes der Ebene mit x, y, z, so ist die Entfernung dieses Punktes der Ebene von dem Punkte D $\sqrt{[(x-h)^2+(y-i)^2+(z-k)^2]}$, und von dem Punkte E $\sqrt{[(x-h')^2+(y-i')^2+(z-k')^2]}$: und da beide Entfernungen gleich sind, so hat man $(x-h)^2+(y-i)^2+(z-k)^2=(x-h')^2+(y-i')^2+(z-k')^2$, woraus so fort folgt

$$(h'-h)x+(i'-i)y+(k'-k)z = \tfrac{1}{2}(h'^2-h^2+i'^2-i^2+k'^2-k^2) \quad 689)$$

oder wenn man $h'-h=A, i'-i=B, k'-k=C$, und $\frac{1}{2}(h^2-h'^2+i^2-i'^2+k^2-k'^2)=D$ setzt, erhält man $Ax+By+Cz+D=0$, und da dieser Ausdruck für jeden Punkt der Ebene gilt, so ist er zugleich der allgemeine Ausdruck aller Punkte der Ebene, mithin die Gleichung der Ebene selbst; sonach ist eine Ebene immer eine Fläche der ersten Ordnung.

452. Ist $h=h'$, mithin $A=0$; so ist die Linie DE parallel mit der koordinirten Ebene yz, also auch,

da die erzeugte Ebene OB immer senkrecht auf dieser Linie steht, die Ebene senkrecht auf der Ebene yz. Man hat daher die Gleichung einer auf der Ebene yz senkrechten Ebene $By+Cz+D=o$ und eben so sind

$$Ax+By+D=o,\quad Ax+Cz+D=o \qquad 690)$$

Gleichungen von Ebenen, welche auf der Ebene xy und xz beziehungsweise senkrecht stehen. Ist aber nebst $h=h'$, auch $i=i'$, woraus $A=o$, $B=o$ folgt; so ist die Linie DE zugleich die Axe der z, mithin steht die erzeugte Ebene auf der Axe der z senkrecht, wenn ihre Gleichung $Cz+D=o$ wird: und eben so bezeichnen die Gleichungen $Ax+D=o$, $By+D=o$ Ebenen, 691) welche beziehungsweise auf der Axe der x, und auf der Axe der y senkrecht sind.

453. Um noch die Punkte zu bestimmen, in welchen die durch die Gleichung $Ax+By+Cz+D=o$ vorgestellte Ebene den Axen begegnet, setze man $y=o, z=o$, so erhält man für den Durchschnittspunkt der Ebene mit der Axe der x die Gleichung $Ax+D=o$, und auf gleiche Weise für die Durchschnitte der Ebene mit der Axe der y und der z die Gleichungen: $By+D=o$, $Cz+D=o$. Bezeichnet man nun die Entfernungen dieser Punkte von dem Anfange der Koordinaten, mit a, b, c, so hat man 692)

$a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$, also auch wenn man die hieraus für A, B, C folgenden Werthe in die Gleichung der Ebene substituirt, wird

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \text{ oder} \qquad 693)$$

$bcx+acy+abz=abc$ eine andere allgemeine 694) Form der Gleichung einer Ebene.

Fällt man aber vom Anfangspunkte der Koordinaten ein Perpendikel p auf die Ebene, und bezeichnet die Winkel desselben mit den drei Axen durch α, β, γ, so hat man offenbar $p = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma$: wenn man nun die hieraus für a, b, c entspringenden Werthe in die Gleichung 693) substituirt, so erhält man $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ als Gleichung einer 695) Ebene, deren Lage gegen die koordinirten Ebenen durch die 4 Größen α, β, γ, p, bestimmt ist, die sich jedoch wegen der Bedingungsgleichung 593) auf 3 reduziren lassen.

454. Eine Ebene steht auf einer Geraden senkrecht, wenn ihre Knotenlinien mit den Projektionen der Geraden auf die koordinirte Ebenen rechte Winkel einschließen. Stellt daher $Ax + By + Cz + D = o$ die Gleichung der Ebene vor, und sind $x = az + g$, $y = a'z + g'$ die Gleichungen der Geraden, so hat man nach (450) die Gleichungen der in den Ebenen xz, yz gelegenen Knotenlinien $Ax + Cz + D = o$, und $By + Cz + D = o$, deren jene auf der Geraden $x = az + g$ senkrecht steht, wenn nach (313) $A = aC$ ist, und eben so wird diese auf der Geraden $y = a'z + g'$ senkrecht, wenn $B = a'C$ ausfällt; daher erhält man die Gleichungen der Geraden welche auf der gegebenen Ebene senkrecht ist, $x = \frac{A}{C}z + g$, $y = \frac{B}{C}z + g'$. Bezeichnet 696) man aber die Koordinaten eines Punktes, durch welchen jene Gerade gezogen ist mit x', y', z', so sind $x - x' = a(z - z')$, und $y - y' = a'(z - z')$ ihre Gleichungen, und bringt man die Gleichung der Ebene auf die Form

$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + E = o$, wo E die Größe $Ax' + By' + Cz' + D$ bedeutet; so er-

hält man, wenn man hier statt $x-x'$ und $y-y'$ ihre Werthe setzt

$(Aa+Ba'+C)(z-z')+E=0$, also

$$z-z'=-\frac{E}{Aa+Ba'+C},$$ und hieraus

$$y-y'=-\frac{a'E}{Aa+Ba'+C}, x-x'=-\frac{aE}{Aa+Ba'+C}:$$

wofern nun die Gerade auf der Ebene senkrecht steht, gelten die Gleichungen $A=aC$, $B=a'C$, hiedurch erhält man

$$z-z'=\frac{CE}{A^2+B^2+C^2}, y-y'=\frac{BE}{A^2+B^2+C^2},$$

$$x-x'=\frac{AE}{A^2+B^2+C^2} \qquad 697)$$

wo x, y, z die Koordinaten des Punktes vorstellen, in welchem jene Gerade die Ebene trifft: der Abstand dieses Punktes von jenem, durch welchen die Gerade gezogen wurde, ist

$$\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}=\frac{E}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}. \qquad 698)$$

455. Seien $Ax+By+Cz+D=0$ und $A'x+B'y+C'z+D'=0$ die Gleichungen zweier sich schneidenden Ebenen, man sucht ihren Neigungswinkel? Errichtet man auf jeder derselben eine Senkrechte dergestalt, daß diese gehörig verlängert in einem Punkte zusammentreffen, so ist der von beiden Linien eingeschlossene Winkel offenbar der gesuchte Neigungswinkel der Ebenen: heißt dieser Winkel V, und sind

$x=az+g$, $y=a'z+g'$, und $x=bz+h$, $y=b'z+h'$

die Gleichungen dieser Linien, so hat man 681)

$$\cos V=\frac{1+ab+a'b'}{\sqrt{(1+a^2+a'^2)(1+b^2+b'^2)}}. \qquad 699)$$

es ist aber wegen des Senkrechtstehens dieser Geraden auf den gegebenen Ebenen nach (454)
$A = aC$, $B = a'C$, und $A' = bC'$, $B' = b'C'$; substituirt man also diese Werthe in die Gleichung ϱ), so erhält man

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}} \quad 699)$$

Hieraus folgt $1 - \cos^2 V =$
$$\frac{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}$$
der Zähler dieses Ausdrucks gibt, wenn man die sich aufhebenden Größen wegläßt
$$A^2 B'^2 + A'^2 B^2 + A^2 C'^2 + A'^2 C^2 + B^2 C'^2 + B'^2 C^2 - 2AA'BB' - 2AA'CC' - 2BB'CC'$$
oder $(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2$; sonach hat man

$$\sin V = \sqrt{\frac{(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}} \quad 700)$$

$$\text{und } tg\, V = \frac{\sqrt{[(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2]}}{AA' + BB' + CC'} \quad 701)$$

456. Sollen beide Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muß $\cos V = 0$ werden, d. h. zwischen den Koefficienten der Größen x, y, z in den Gleichungen beider Ebenen muß die Bedingungsgleichung
$$AA' + BB' + CC' = 0 \text{ Statt finden.} \quad 702)$$
Sollen hingegen beide Ebenen einander parallel laufen, so muß $\sin V = 0$ werden, mithin
$(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2 = 0$
sein, welche Gleichung Statt findet, wenn
$AB' - A'B = 0$, $AC' - A'C = 0$, oder wenn
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \text{ ausfällt.} \quad 703)$$

Ist endlich eine der beiden Ebenen die koordinirte Ebene selbst, z. B. wenn die zweite Ebene mit xy übereinfällt, so hat man $z = o$, und ihre Gleichung gibt $z = -\frac{D' + A'x + B'y}{C'}$, woraus nach (107) $A' = o$, $B' = o$ folgt, hiedurch verwandelt sich die Formel 699) wenn man den Neigungswinkel mit Z bezeichnet, in

$$\cos Z = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} \quad 704)$$

und eben so erhält man für den Neigungswinkel derselben Ebene gegen die Ebenen xz und yz die Ausdrücke

$$\cos Y = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} \text{ und } \cos X = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} \quad 705)$$

457. Den Neigungswinkel einer Ebene welche durch zwei sich schneidende Geraden gezogen ist, gegen die koordinirten Ebenen zu finden? Seien $x - x' = a(z - z')$, und $y - y' = a'(z - z')$ die Gleichungen der einen Geraden $x - x'' = b(z - z'')$, $y - y'' = b'(z - z'')$ die Gleichungen der zweiten Geraden, und $Ax + By + Cz + D = o$ die Gleichung der gesuchten Ebene: da die letztere durch die Punkte x', y', z' und x'', y'', z'' gezogen ist, so bestehen die Gleichungen: $Ax' + By' + Cz' + D = o$ und $Ax'' + By'' + Cz'' + D = o$. Zieht man diese Gleichungen von der vorigen ab, so erhält man $A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = o$, und $A(x - x'') + B(y - y'') + C(z - z'') = o$, und wenn man hierin statt $x - x'$, $y - y'$, $x - x''$, $y - y''$ ihre Werthe aus den Gleichungen der beiden Geraden gezogen, substituirt, wird $Aa + Ba' + C = o$, $Ab + Bb' + C = o$, deren Unterschied $A(a - b) + B(a' - b') = o$

gibt $B = -\frac{A(a-b)}{a'-b'}$, und hieraus wird

$C = \frac{A(ab'-a'b)}{a'-b'}$: setzt man nun diese Werthe in die Formel 704), so ergibt sich

$$\cos Z = \frac{ab'-a'b}{\sqrt{[(a-b)^2+(a'-b')^2+(ab'-a'b)^2]}} \quad 706)$$

und eben so folgt aus 705) $\cos Y$, und $\cos X$.

VII. Eigenschaften der Projektionen.

458. Sei ABC (Fig. 39) ein im Raume gelegenes Dreieck, A'B'C' dessen Projektion auf die Ebene xy: man nehme an, die Koordinaten der Punkte A, B, C seien x, y, z: x', y', z': x'', y'', z'' und die Gleichungen der Geraden AB, AC

$x-x' = a(z-z')$, $y-y' = a'(z-z')$ und
$x-x'' = b(z-z'')$, $y-y'' = b'(z-z'')$; so erhält man durch Eliminirung der Größen $z-z'$, $z-z''$ die Gleichungen ihrer Projektionen auf die Ebene xy: es wird also die Gleichung der Geraden A'B'

$y-y' = \frac{a'}{a}(x-x')$, und der Geraden A'C'

$y-y'' = \frac{b'}{b}(x-x'')$, man erhält daher den von ihnen eingeschlossenen Winkel aus 417),

$\sin B'A'C' = \frac{ab'-a'b}{\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}}$. Ferner ist

$$AB = \sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]} = (z-z')\sqrt{(1+a^2+a'^2)},$$

und eben so $AC = (z-z'')\sqrt{(1+b^2+b'^2)}$: endlich wird

$A'B' = \sqrt{[(x-x')^2+(z-z')^2]} = (z-z')\sqrt{(a^2+a'^2)}$

$A'C' = (z - z'')\sqrt{(b^2 + b'^2)}$. Mittelst dieser Ausdrücke ergibt sich, die Fläche des Dreieckes

$$ABC = \tfrac{1}{2} AB \times AC \sin BAC$$

$$= \tfrac{1}{2}(z-z')(z-z'')\sqrt{[(a-b)^2 + (a'-b')^2 + (ab'-a'b)^2]}$$

und die Fläche des Dreieckes $A'B'C'$,

$$= \tfrac{1}{2} A'B' \times A'C' \sin B'A'C' = \tfrac{1}{2}(z-z')(z-z'')(ab'-a'b);$$

und mit Rücksicht auf 706) folgt hieraus

$ABC \cos Z = A'B'C'$ d. i. die Projektion eines Dreieckes ist dem in den Kosinus seines Neigungswinkels multiplizirten Inhalte gleich. Da nun ein jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerfällt werden kann, deren Projektionen zusammen genommen die Projektion des Vielecks geben, so erhält man auch die **Projektion eines Vielecks auf irgend eine Ebene, wenn man die Fläche des Vielecks in den Kosinus des Winkels, den beide Ebenen bilden, multiplizirt.**

Bekanntlich läßt sich jede von einer Kurve eingeschlossene ebene Figur als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten, sonach gilt vorstehender Satz auch von krummlinigten Figuren.

459. Sei nun F eine durch irgend eine Kurve begränzte Figur, und in einer durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehenden Ebene gelegen, man führe durch den Anfangspunkt eine auf die Figur senkrechte Gerade, und bezeichne mit ϑ, ϑ', ϑ'' die Winkel dieser Geraden mit den Koordinatenaxen, hingegen mit p, p', p'' die Projektionen von F auf die koordinirten Ebenen yz, xz, xy: da der Neigungswinkel der Ebenen F und xy dem von der Normale und der Axe der z eingeschlossenen Winkel gleich ist, so hat man

$p = F\cos\vartheta$, $p' = F\cos\vartheta'$, $p'' = F\cos\vartheta''$. Man 707) bezeichne noch mit q die Projektion von F auf eine neue

Ebene, deren Normale mit den koordinirten Axen die Winkel α, β, γ, und mit der vorigen Normale den Winkel φ einschließen soll, so hat man nach 685)

$$\cos\varphi = \cos\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta'\cos\beta + \cos\vartheta''\cos\gamma$$

multiplizirt man beide Glieder dieser Gleichung mit F, und setzt P, P', P'' statt $F\cos\vartheta, F\cos\vartheta', F\cos\vartheta''$ so kommt

$$q = P\cos\alpha + P'\cos\beta + P''\cos\gamma \qquad 708)$$

hiedurch findet man die Projektion einer Figur auf irgend eine Ebene, wenn ihre Projektionen auf drei koordinirte Ebenen gegeben sind, gegen welche die Lage der neuen Ebene auch bekannt ist.

460. Wir wollen auf gleiche Weise eine beliebige Menge von Flächen betrachten, welche mit einander ein irgend einer krummen Fläche eingeschriebenes Polyeder bilden: jede dieser Flächen projiziren wir auf die drei koordinirten Ebenen, und addiren hierauf die Projektionen, die auf eine und dieselbe Ebene fallen. Seien P, P', P'' die auf diese Weise erhaltenen drei Summen, und es sei Q die Summe der Projektionen jener Flächen auf eine neue Ebene, deren Normale mit den Koordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet, so hat man der Gleichung 707) gemäß

$$Q = P\cos\alpha + P'\cos\beta + P''\cos\gamma \qquad 709)$$

Bezeichnet man mit Q', Q'' die Summen der Projektionen jener Flächen auf zwei andere Ebenen, die sich mit der letztgenannten im Anfangspunkte der Koordinaten unter rechten Winkeln schneiden, und mit $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'' \gamma'$ die Winkel ihrer Normalen und der Koordinatenaxen, so ist nach der Analogie

$$Q' = P\cos\alpha' + P'\cos\beta' + P''\cos\gamma'$$
$$Q'' = P\cos\alpha'' + P'\cos\beta'' + P''\cos\gamma''$$

Addirt man die Quadrate dieser Werthe von Q, Q', Q''; so findet man wegen den Bedingungsgleichungen 601)

$$Q^2 + Q'^2 + Q''^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 \qquad 710)$$

und durch Elimination der Größen P, P', P''

$$\left.\begin{aligned} P &= Q\cos\alpha + Q'\cos\alpha' + Q''\cos\alpha'' \\ P' &= Q\cos\beta + Q'\cos\beta' + Q''\cos\beta'' \\ P'' &= Q\cos\gamma + Q'\cos\gamma' + Q''\cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \qquad 711)$$

461. Man ersieht hieraus, daß die Summe $Q^2 + Q'^2 + Q''^2$ von der Lage der drei Projektionsebenen unabhängig ist, d. h. sie ändert sich nicht, wenn man von einem System rechtwinkliger Koordinaten zu einem anderen übergeht: diese Summe ist immer dem Quadrate der projizirten Fläche gleich, wovon man sich überzeugen kann, wenn man die Gleichungen 707) zum Quadrat erhebt, und ihre Summe nimmt. Man erhält ferner aus 710)

$$Q = \sqrt{[P^2 + P'^2 + P''^2 - Q'^2 - Q''^2]}$$

welcher Ausdruck den größten Werth gibt, wenn $Q' = 0$, und $Q'' = 0$ ist; man hat dann den Werth der größten Projektion $Q = \sqrt{[P^2 + P'^2 + P''^2]}$, und die Ebene 712) dieser größten Projektion ergibt sich der Lage nach aus 711)

$$\cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{P^2+P'^2+P''^2)}},\quad \cos\beta = \frac{P'}{\sqrt{(P^2+P'^2+P''^2)}},$$
$$\cos\gamma = \frac{P''}{\sqrt{(P^2+P'^2+P''^2)}} \qquad 713)$$

welche Gleichungen die Richtung der Geraden angeben, die im Anfangspunkte der Koordinaten auf der Ebene der größten Projektion senkrecht steht.

VIII. Flächen der zweiten Ordnung.

462. Die allgemeinste Form einer Gleichung des zweiten Grades zwischen drei veränderlichen Größen x, y, z ist

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dyz + Exz + Fxy + Gz + Hy + Jx + K = o \quad 714)$$

Um die hiedurch ausgedrückten Flächen kennen zu lernen, ist es nothwendig diese Gleichung durch eine schickliche Transformation der Koordinaten zu vereinfachen. Man versetze erstlich den Anfangspunkt der Koordinaten auf den Punkt g, h, i während die Axen der neuen Koordinaten x', y', z' den vorigen parallel bleiben, so hat man (418)

$x = x' + g$, $y = y' + h$, $z = z' + i$, hiedurch verwandelt sich die Gleichung 714) in

$$\begin{aligned} &Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + Dy'z' + Ex'z' + Fx'y' \\ &+ (2Ai + Dh + Eg + G)z' \\ &+ (2Bh + Di + Fg + H)y' \\ &+ (2Cg + Ei + Fh + J)x' \\ &+ Ai^2 + Bh^2 + Cg^2 + Dhi + Egi + Fgh + Gi + Hh \\ &\qquad + Jg + K = o \end{aligned}$$

Setzt man nun $2Ai + Dh + Eg + G = o$

$2Bh + Di + Fg + H = o$

$2Cg + Ei + Fh + J = o$

und bestimmt diesen Gleichungen gemäß nach 73) die willkührlichen Größen g, h, i, so findet man

$$\left.\begin{aligned} g &= \tfrac{1}{2}m[(DF - 2BE)G + (DE - 2AF)H + (4AB - D^2)J] \\ h &= \tfrac{1}{2}m[(EF - 2CD)G + (4AC - E^2)H + (DE - 2AF)J] \\ i &= \tfrac{1}{2}m[(4BC - F^2)G + (EF - 2CD)H + (DF - 2BE)J] \end{aligned}\right\} 715)$$

wobei zur Abkürzung

$m = 1 : (AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF)$ gesetzt wurde. Ist also die Größe

$AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF$ von Null verschieden; so kann man durch diese Transformation aus der Gleichung 714) die Glieder wegschaffen, welche die Koordinaten x', y', z' in der ersten Potenz enthalten, und es entsteht die Gleichung

$Ax'^2 + By'^2 + Cx'^2 + Dy'z' + Ex'z' + Fx'y' + L = 0$ 716)

wobei L die Größe $Ai^2 + Bh^2 + Cg^2 + Dhi + Egi + Fgh + Gi + Hh + Jg + K$ bedeutet.

463. Wenn reelle Werthe von x', y', z' bekannt sind, welche dieser Gleichung Genüge leisten, so kann man sie sämmtlich auch mit entgegengesetzten Zeichen nehmen, ohne die Gleichung zu stören: zieht man nun aus dem Anfangspunkte der Koordinaten an die Punkte x', y', z' und $-x', -y', -z'$ die Radienvektoren, so ist ihr Werth nach 590) $= \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$ einer und derselbe, während nach 591) die Kosinusse der Winkel, welche diese Radienvektoren mit den Axen der x', y', z' bilden, gleiche Werthe aber entgegengesetzte Zeichen erhalten, woraus erhellet, daß je zwei zu derselben Axe gehörende dieser Winkel mit einander zwei Rechte ausmachen: es befinden sich daher die Punkte x', y', z' und $-x', -y', -z'$ mit dem Anfangspunkte der Koordinaten in einer geraden Linie und stehen von demselben beiderseits gleichweit ab, d. i. jede durch den Anfangspunkt gehende Verbindungslinie des durch die Gleichung 716) vorgestellten Systems von Punkten wird in diesem Anfangspunkte halbirt, welcher daher ein Mittelpunkt des Systems heißt. Die Lage desselben erhellet aus den Gleichungen 715).

464. Man kann aber die Gleichung 716) noch mehr vereinfachen, wenn man die Richtung der Koordinatenaxen verändert, welches mit Hülfe der Gleichungen 595) geschehen kann, und es ist wie in (326) einzusehen, daß man hiebei die Winkel ψ und φ so wählen kann, daß aus der Gleichung 716) jene Glieder, welche die Produkte der Koordinaten x', y', z' enthalten, verschwinden; bezeichnet man die neuen Koordinaten mit

x, y, z, so erhält die Gleichung 716) die einfachere Form

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + L = 0, \qquad 717)$$

auf welche sonach die Gleichung einer jeden Fläche der zweiten Ordnung, welche einen Mittelpunkt hat, zurückgeführt werden kann. S. V. II. 66.

465. Ist aber der Nenner von g, h, i oder

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 - 4ABC - DEF = 0 \quad \nu)$$

so kann man zuerst durch die Verrückung der Axen nach 595) der Gleichung 714) die Form

$$Mz'^2 + Ny'^2 + Px'^2 + Qz' + Ry' + Sx' + K = 0 \quad \varrho)$$

ertheilen, und wenn man hierauf den Anfangspunkt der Koordinaten in den Punkt g', h', i' versetzt, die neuen Axen aber den vorigen parallel sein läßt, welches durch die Substitution von

$x'' + g'$, $y'' + h'$, $z'' + i'$ statt x', y', z' geschieht, so erhält man zur Beseitigung der Glieder, in welchen bloß die ersten Potenzen der Koordinaten erscheinen, die Bedingungsgleichungen

$$2Mi' + Q = 0, \quad 2Nh' + R = 0, \quad 2Pg' + S = 0$$

woraus man erhält

$$i' = -\frac{Q}{2M}, \quad h' = -\frac{R}{2N}, \quad g' = -\frac{S}{2P}$$

allein die Bedingungsgleichung ν) schließt das Vorhandensein eines Mittelpunkts aus, daher wenigstens einer der Werthe g', h', i', unendlich, oder eine der Größen M, N, P in der Gleichung ϱ) verschwinden muß.

Ist also in ϱ) P = 0, und man setzt

$y' = y + h$, $z' = z + i$, so erhält man eine transformirte Gleichung, in welcher die Koefficienten von z^2, y^2 wieder M und N sind, die Glieder hingegen mit den ersten Potenzen von y und z verschwinden, wenn man

$$i = -\frac{Q}{2M}, \quad h = -\frac{R}{2N}$$

annimmt. Um noch das von x, y, z freie Glied zu beseitigen, setze man $x' = x + g$, wodurch

$$g = -\frac{Mi^2 + Nh^2 + Qi + Rh + K}{S}$$

wird, man erhält also

$$Mz^2 + Ny^2 + Sx = 0 \qquad 718)$$

Ist aber $S = 0$, so gibt die Gleichung ϱ) bei dieser Substitution

$$Mz^2 + Ny^2 + L = 0, \text{ wo} \qquad 719)$$

$$L = Mi^2 + Nh^2 + Qi + Rh + K \text{ ist.}$$

Sei nun sowohl $N = 0$, als $P = 0$, dann wird die Gleichung ϱ) durch die Substitution von $z' = z + i$ das mit z versehene Glied verlieren, wenn man

$i = -\frac{Q}{2M}$ setzt, und durch die Annahme $y' = y + h$, wird das von x, y, z freie Glied wegfallen, wenn man

$h = -\frac{Mi^2 + Qi + K}{R}$ sein läßt, daher wird in diesem Falle die Gleichung ϱ)

$$Mz^2 + Ry + Sx = 0 \qquad 720)$$

und für $R = 0$ aber

$$Mz^2 + Sx + L = 0 \qquad 721)$$

IX. Flächen, welche einen Mittelpunkt haben.

466. Man kann die Flächen der zweiten Ordnung am leichtesten übersehen, wenn man sie, in sofern sie einen Mittelpunkt haben, oder nicht, in zwei Klassen theilt.

Die Flächen der ersten Klasse, welche einen Mittelpunkt haben, sind sämmtlich in der Gleichung 717)

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + L = 0 \text{ begriffen.}$$

Hierunter gehören, wenn im Folgenden die Koeffizienten M, N, P, L jederzeit bejaht angenommen werden,

I. das Ellipsoid vorgestellt durch die Gleichung

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 - L = 0$$

II. der elliptische Cylinder, dessen Gleichung

$$Mz^2 + Ny^2 - L = 0$$

III. das einfächerige Hyperboloid in der Gleichung

$$Mz^2 - Ny^2 - Px^2 + L = 0$$

IV. das zweifächerige Hyperboloid in der Gleichung

$$Mz^2 - Ny^2 - Px^2 - L = 0, \text{ und}$$

V. der elliptische Kegel in der Gleichung

$$Mz^2 - Ny^2 - Px^2 = 0 \text{ enthalten.}$$

467. Schneidet man, die durch die Gleichung

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 - L = 0$$

vorgestellte Fläche mit Ebenen, die in dem Abstande k den koordinirten Ebenen beziehungsweise parallel laufen, so erhält man Durchschnitte, deren Gleichungen

$$Ny^2 + Px^2 = L - Mk^2, \quad Mz^2 + Px^2 = L - Nk^2,$$
$$Mz^2 + Ny^2 = L - Pk^2$$

zeigen, daß sie Ellipsen sind, deren Größe mit dem zunehmenden Abstande k abnimmt: man nennt daher diese Fläche ein Ellipsoid. Ist $k = 0$, so erhält man die sogenannten Hauptschnitte des Ellipsoids, welche offenbar Ellipsen sind, deren Hauptaxen die Werthe $\sqrt{\frac{L}{P}}, \sqrt{\frac{L}{N}}, \sqrt{\frac{L}{M}}$ haben; bezeichnet man dieselben mit a, b, c, so folgt $P = \frac{L}{a^2}$, $N = \frac{L}{b^2}$, $M = \frac{L}{c^2}$, und die Gleichung des Ellipsoids erhält die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad 722)$$

oder $$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \qquad 723)$$

Ein solches Ellipsoid wird erzeugt, wenn eine Ellipse NRM (Fig. 40) sich parallel mit der Ebene xy längst der Axe der z bewegt, während sie beständig die in den

Ebenen xz und yz gelegenen Ellipsen DB, DC berührt: denn heißen die Hauptaxen AB = a, AC = b, AD = c, x′ die Abscisse des Punktes M, und y′ die Ordinate des Punktes N, so wird die Gleichung

der Ellipse BD $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

der Ellipse CD $\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, woraus

$x'^2=a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$, $y'^2=b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$ folgt: nennt man nun x, y die Koordinaten eines Punktes R in der erzeugenden Ellipse, deren Hauptaxen PM = x′, PN = y′ sind, so hat man

$$\frac{x^2}{x'^2}+\frac{y^2}{y'^2}=1$$

und hierin die für x'^2 und y'^2 gefundenen Werthe gesetzt, wird

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

die Gleichung der erzeugten Fläche, wie oben. S. V. II. 75.

468. Die Annahme N = P, oder a = b, verwandelt die Gleichung in

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad 724)$$

sie gibt für jeden der Ebene xy parallelen Schnitt die Gleichung $x^2+y^2=b^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)$

welche einem Kreise angehört, dessen Halbmesser $b\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}$ ist, woraus erhellet, daß ein Ellipsoid mit zwei gleichen Hauptaxen durch Umdrehung einer Ellipse um die dritte Hauptaxe erzeugt wird. Ein Ellipsoid mit drei gleichen Hauptaxen aber wird von jeder

Ebene in einem Kreise geschnitten, und ist folglich mit einer Kugel identisch, deren Gleichung man erhält, wenn man $a = b = c$, setzt

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad 725)$$

Wenn von den drei Koeffizienten M, N, P einer verschwindet, so verwandelt sich das Ellipsoid in einen elliptischen Cylinder: denn es gehört die Gleichung $Mz^2 + Ny^2 - L = o$ einer Fläche an, welche für jeden auf der Axe der x senkrechten Schnitt eine und dieselbe Ellipse gibt, deren Hauptaxen $\sqrt{\frac{L}{M}}, \sqrt{\frac{L}{N}}$ den Axen der y und z parallel sind. Bezeichnet man diese Hauptaxen, wie oben, mit b und c, so folgt die Gleichung desselben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad 726)$$

469. Schneidet man die durch die Gleichung

$$Mz^2 - Ny^2 - Px^2 + L = o$$

vorgestellte Fläche mit Ebenen, die in dem Abstande k den koordinirten Ebenen parallel laufen, so erhält man Durchschnitte, deren Gleichungen

$$Ny^2 - Mz^2 = L - Pk^2, \quad Px^2 - Mz^2 = L - Nk^2$$
$$Ny^2 + Px^2 = L + Mk^2$$

zeigen, daß die auf der Axe der x und y senkrechten Schnitte Hyperbeln sind, welche mit dem wachsenden Abstande k abnehmen, hingegen jeder auf der Axe der z senkrechte eine Ellipse sei, die mit dem Abstande k zunimmt. Man nennt diese Fläche das einfächerige Hyperboloid. Für $k = o$ erhält man dessen Hauptschnitte mit den Hauptaxen $\sqrt{\frac{L}{M}}, \sqrt{\frac{L}{N}}, \sqrt{\frac{L}{P}}$: bezeichnet man sie nach der Ordnung mit c, b, a so wird die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \text{ oder} \qquad 727)$$

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2 \qquad 728)$$

Die Fläche wird erzeugt, wenn sich eine Ellipse NRM (Fig. 41) der Ebene xy parallel längst der Axe der z so bewegt, daß sie beständig die in den Ebenen xz und yz gelegenen ungleichen Hyperbeln MB, NC berühret: denn sind x', y' die Abscissen von M und N, hingegen x, y die Koordinaten der erzeugenden Ellipse MN, so hat man für die Hyperbeln BM, CN die Gleichungen

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{y'^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

aus welchen sich

$$x'^2=a^2\left(\frac{z^2}{c^2}+1\right), \quad y'^2=b^2\left(\frac{z^2}{c^2}+1\right)$$

ergibt, während für die Ellipse NRM, deren Hauptaxen $PM=x'$, $PN=y'$ sind, die Gleichung besteht,

$$\frac{x^2}{x'^2}+\frac{y^2}{y'^2}=1. \quad \text{S. B. II. 79.}$$

und wenn man hierin für x'^2, y'^2 ihre Werthe setzt, wird

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ist $P=N$, also auch $a=b$, so gibt die Gleichung des auf die Axe der z senkrechten Schnittes,

$$N(y^2+x^2)=L-Mk^2$$

welche einem Kreis vom Halbmesser $\sqrt{\frac{L-Mk^2}{N}}$ angehört, daher dann jeder auf die Axe der z senkrechte Schnitt ein Kreis ist, und es entsteht das Hyperboloid durch die Umdrehung einer Hyperbel um die Axe der z, dessen Gleichung $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ist. 729)

470. Einen merkwürdigen Einfluß auf die Gestalt der Fläche übt das Zeichen von L aus. Ist nämlich L negativ, also

$$Mz^2 - Ny^2 - Px^2 - L = 0$$

die Gleichung der Fläche, so erhält man für einen in dem Abstande k der Ebene xy parallelen Schnitt, den Ausdruck $Ny^2 + Px^2 = Mk^2 - L$

welchem so lange nicht Genüge geschieht, als k die Größe $\sqrt{\frac{L}{M}}$ nicht übersteigt; demnach begegnet die Ebene xy der Fläche gar nicht. Da ferner die durch den Mittelpunkt der Fläche, auf die Ebene xy senkrecht geführten Schnitte Hyperbeln sind, deren gemeinschaftliche Querare der Axe der z parallel ist; so besteht diese Fläche aus 2 abgesonderten Hyperboloiden, die zu beiden Seiten der Ebene xy befindlich sind: man nennt sie das zweifächrige Hyperboloid, ihre Gleichung wird durch obige Substitution

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad 730$$

Ist N = P, so erhellet wie vorher, daß das Hyperboloid durch Umdrehung zweier entgegenstehenden Hyperbeln entstanden ist. S. B. II. 82.

471. Ist endlich L = o, so stellt die Gleichung

$$Mz^2 - Ny^2 - Px^2 = o$$

eine Fläche vor, welche von den Ebenen xz, yz nach zwei sich schneidenden Geraden, deren Gleichungen

$z = \pm x\sqrt{\frac{P}{M}}$, $z = \pm y\sqrt{\frac{N}{M}}$ sind, und die von jeder der Ebene xy parallelen Ebene in einer Ellipse geschnitten wird, deren Mittelpunkt in der Axe der z liegt, sie heißt ein elliptischer Kegel, der für N = P in einen gewöhnlichen geraden Kegel übergeht. Es ist leicht

einzusehen, daß der elliptische Kegel die Asymptotenfläche beider genannten Hyperboloide sei: denn ist für einerlei x und y die dritte Koordinate des Hyperboloids z, und die des Kegels z', so hat man

$$z^2 = \frac{N}{M}y^2 + \frac{P}{M}x^2 \mp \frac{L}{M}$$

$$z'^2 = \frac{N}{M}y^2 + \frac{P}{M}x^2$$

daher $z'^2 - z^2$
oder $(z' + z)(z' - z)$ $\Big\} = \pm\frac{L}{M}$

mithin $z' - z = \pm\frac{L}{M(z' + z)}$: da nun sowohl mit den x als auch mit den y die z und z' wachsen, so wird der Unterschied der Ordinaten $z' - z$ desto kleiner, je größer die Ordinaten z' und z werden, d. i. beide Flächen nähern sich immer mehr, ohne sich je zu erreichen.

X. Kegelschnitte.

472. Bekanntlich entsteht der Kegel durch die Umdrehung einer durch einen gegebenen festen Punkt gezogenen Geraden um eine andere unbewegliche Gerade, die gleichfalls durch den festen Punkt geht. Von den beiden Geraden heißt die erstere die erzeugende Linie, die andere die Axe des Kegels, und der feste Punkt wird der Scheitel, oder besser der Mittelpunkt des Kegels genannt. Bei einem geraden Kegel bildet die erzeugende Linie mit der Axe einen unveränderlichen Winkel α.

Seien x', y', z' die Koordinaten des Mittelpunkts, also

$$x - x' = a(z - z'),\ y - y' = a'(z - z')$$

die Gleichungen der Axe, und

$$x - x' = b(z - z'),\ y - y' = b'(z - z')$$

die Gleichungen der erzeugenden Linie, so hat man

$$b = \frac{x - x'}{z - z'},\ b' = \frac{y - y'}{z - z'}$$

und wegen 678)

$$\cos\alpha = \frac{1 + ab + a'b'}{\sqrt{(1 + a^2 + a'^2)(1 + b^2 + b'^2)}}$$

$$= \frac{1 + \frac{a(x - x')}{z - z'} + \frac{a'(y - y')}{z - z'}}{\sqrt{(1 + a^2 + a'^2)\left(1 + \left(\frac{x - x'}{z - z'}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z - z'}\right)^2\right)}}$$

und hieraus, wenn man den Nenner wegschafft, und beide Theile zum Quadrat erhebt, erhält man

$$[z - z' + a(x - x') + a'(y - y')]^2$$
$$= \cos^2\alpha (1 + a^2 + a'^2)[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2],$$

die Gleichung der Kegelfläche. Vergl. B. II. 185.

473. Für den Durchschnitt derselben mit der Ebene xy ist $z = 0$, und wenn man die Axe des Kegels in der Ebene xz, und dessen Mittelpunkt auf der Axe der z annimmt, so ist auch

$x' = 0$, $y' = 0$, $a' = 0$, daher gibt obige Gleichung für den Kegelschnitt den Ausdruck

$$(ax - z')^2 - \cos^2\alpha (1 + a^2)(x^2 + y^2 + z'^2) = 0$$

und, wenn man diese Gleichung entwickelt und ordnet, erhält man

$$y^2 + (1 - \frac{a^2}{k})x^2 + \frac{2az'}{k}x = z'^2(\frac{1}{k} - 1) \qquad 731)$$

wo, Kürze halber, k die Größe $(1 + a^2)\cos^2\alpha$ bedeutet. Sei β der Winkel zwischen der Axe des Kegels und der Axe der z, so ist a dessen Tangente, also 157)

$\frac{a^2}{k} = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}$, und $\frac{1}{k} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}$. Ist nun $\alpha + \beta < 90°$, so begegnet die Ebene xy sämmtlichen Lagen der erzeu-

genden Linie, und schneidet folglich den Kegel in einer geschlossenen Linie: setzt man $\alpha + \beta = 90° - n$, so ist $\sin\beta = \cos(n+\alpha)$, und $\cos\beta = \sin(n+\alpha)$, also

$$\frac{a}{\sqrt{k}} = \frac{\cos(n+\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sin(n+\alpha)}{\cos\alpha}, \text{ daher}$$

$\frac{a}{\sqrt{k}} < 1$, und es ist in diesem Falle der Koeffizient von x^2 in der Gleichung 731) positiv, oder der Schnitt ist eine Ellipse, welche in einen Kreis übergeht, wenn $\beta = 0$, oder die Axe des Kegels mit der Axe der z übereinfällt, da dann $a = 0$, und $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$ wird, wodurch die Gleichung 731) in die einfachere

$$y^2 + x^2 = z'^2(\sec^2\alpha - 1) = z'^2 tg^2\alpha$$

übergeht. Ist aber $\alpha + \beta = 90°$, so wird die Ebene xy der Seite des Kegels parallel, und wegen

$$\sin\beta = \cos\alpha, \text{ ist } \frac{a}{\sqrt{k}} = 1,$$

und die Gleichung 731) verwandelt sich in folgende

$$y^2 + 2z'x = y'^2(tg^2\alpha - 1)$$

der Schnitt ist folglich eine Parabel. Ist endlich $\alpha + \beta > 90°$, so begegnet die schneidende Ebene xy beiden Kegelflächen, und da für diesen Fall n negativ, also $\cos(n+\alpha) > \cos\alpha$ ist, so wird $\frac{a}{\sqrt{k}} > 1$, und der Koeffizient von x^2 in der Gleichung 731) negativ, oder der Schnitt ist eine Hyperbel.

474. Nimmt man an, es falle die erzeugende Linie in einer ihrer Lagen mit der Axe der z, so ist dann $\beta = \alpha$, also $\frac{a}{\sqrt{k}} = tg\alpha = a$, $\frac{1}{\sqrt{k}} = 1$, daher die Gleichung 731) die einfachere Form erhält

$$y^2 + (1 - a^2)x^2 + 2az'x = o \qquad 732)$$

So lange nun $a < 1$ oder $\beta < 45°$, wird $1 - a^2$ positiv, und die Gleichung 732) gibt für den Schnitt eine Ellipse: ist $a = 1$ oder $\beta = 45°$, so wird $1 - a^2 = o$, und der Schnitt ist eine Parabel: für $a > 1$, oder $\beta > 45°$ wird $1 - a^2$ negativ, daher gibt die Gleichung 732) für den Schnitt eine Hyperbel.

XI. Flächen ohne einen Mittelpunkt.

475. Zu den Flächen der zweiten Ordnung, welche keinen Mittelpunkt haben, gehören:

I. das elliptische Paraboloid

II. das hyperbolische Paraboloid

III. der parabolische Cylinder. Die Gleichung 718)

$$Mz^2 + Ny^2 - Sx = o$$

stellt eine Fläche vor, für deren zur Ebene yz parallelen in der Entfernung g geführten Schnitt, die Gleichung

$$Mz^2 + Ny^2 = Sg$$

welche einer Ellipse angehört, Statt hat: dagegen für einen jeden der Ebene xz parallelen in der Entfernung h gehenden Schnitt, die Gleichung gilt

$$Mz^2 - Sx + Nh^2 = o$$

welche eine Parabel gibt, deren Hauptaxe in der Ebene xy, und der Axe der x parallel liegt, und deren Parameter $\frac{S}{M}$ von h nicht abhängt; es sind sonach sämmtliche der Ebene yz parallele Schnitte gleiche Ellipsen, und die der Ebene xz parallele Schnitte einander gleiche Parabeln: man nennt daher die Fläche das elliptische Paraboloid. Sie wird erzeugt, indem sich eine Ellipse BMC (Fig. 42) parallel zur Ebene yz so bewegt, daß sie die ungleichen Parabeln AB, AC, deren eine in

der Ebene xz, die andere in der Ebene xy gelegen ist, beständig berührt. Denn ist AD = x die Abscisse des Punktes M, CD = y' dessen Ordinate und zugleich eine der beiden Hauptaxen der Ellipse BC, und BD = z' die andere Hauptaxe derselben, ferner $y'^2 = p^2 x$, $z'^2 = q^2 x$ die Gleichungen der Parabeln AC, AB, so hat man zur Gleichung der Ellipse BMC

$$\frac{z^2}{z'^2} + \frac{y^2}{y'^2} = 1$$

und hierin statt y'^2, z'^2 ihre Werthe gesetzt

$$\frac{z^2}{q^2} + \frac{y^2}{p^2} = x \qquad 733)$$

oder $p^2 z^2 + q^2 y^2 - p^2 q^2 x = 0$ 734)

die Gleichung der Fläche. Ist M = N, so wird jeder der Ebene yz parallele Schnitt ein Kreis, und das Paraboloid entsteht dann durch Umdrehung einer Parabel um die Axe der x.

476. Die Gleichung $Mz^2 + Ny^2 - Sx = 0$ gibt für jeden der Ebene yz parallelen Schnitt den Ausdruck $Mz^2 - Ny^2 = Sg$, also eine Hyperbel mit den Hauptaxen $\sqrt{\frac{S}{N}}$, $\sqrt{\frac{S}{M}}$, während ein der Ebene xz oder xy paralleler Schnitt Parabeln liefert. Die zugehörige Fläche heißt ein hyperbolisches Paraboloid: und wird erzeugt, indem sich eine Hyperbel MB parallel zur Ebene yz so bewegt, daß eine ihrer veränderlichen Hauptaxen den Ordinaten z' einer in der Ebene xz befindlichen Parabel AB, und die andere Hauptaxe den Ordinaten y' einer andern in der Ebene xy gelegenen Parabel AC gleich sei. Denn sind $y'^2 = p^2 x$, $z'^2 = q^2 x$ die Gleichungen der Parabeln AB, AC, und

$\frac{z^2}{z'^2} - \frac{y^2}{y'^2} = 1$ die Gleichung der Hyperbel MB, so er-

gibt sich hieraus durch Eliminirung der Größen z', y' die Gleichung der so erzeugten Fläche $\frac{z^2}{q^2} - \frac{y^2}{p^2} = x$, oder

$$p^2 z^2 - q^2 y^2 - p^2 q^2 x = 0 \qquad 735)$$

welche mit der obigen identisch wird, wenn man $M = p^2$, $N = q^2$, $S = p^2 q^2$ setzt.

477. Die Gleichung $Mz^2 - Ry - Sx = 0$ gehört einer Fläche an, welche von jeder zu xz oder yz parallelen Ebene in einer Parabel, hingegen von einer der xy parallelen Ebene nach einer geraden Linie geschnitten wird, und daher den Namen paraboli-scher Cylinder führt. Sie wird erzeugt, indem sich eine gerade Linie BC (Fig. 43) parallel der Ebene xy bewegt, und dabei die in den Ebenen xz, und yz gelegenen Parabeln EE', FF' beständig berührt: denn sind $z^2 = px'$, $z^2 = qy'$ ν) die Gleichungen dieser Parabeln, und $y = ax + b$ die Gleichung der zur Ebene xy parallelen Geraden BC, so ist, weil letztere durch den Punkt C geht, dessen Koordinaten $x = o$, $y = y'$ sind, $b = y'$, ferner hat man, weil für den Punkt B die Koordinaten $y = o$, $x = x'$ gelten, $y' = -ax'$, woraus $a = -\frac{y'}{x'}$ folgt, daher die Gleichung der Geraden BC

$y = -\frac{y'}{x'}x + x'$, und wenn man hierin die Werthe von y', x' aus den obigen Gleichungen ν) setzt, erhält man

$$z^2 - qy - px = 0 \qquad 736)$$

die Gleichung der erzeugten Fläche. Wäre die Parabel FF' eine Ellipse, und die Parabel EE' eine ihrer Größe und Lage nach gegebene Gerade, so würde die erzeugende Gerade BC alsdann ein elliptisches Konoid beschrieben haben, welches wie man leicht einsehen kann, eine Fläche der vierten Ordnung ist.

XII. Die Kurven mit doppelter Krümmung.

478. Jede Kurve kann als der Durchschnitt zweier krummen Flächen angesehen werden. Heißen $F(x', y', z') = 0$ und $f(x', y', z') = 0$ die Gleichungen dieser Flächen, so bestimmt der Innbegriff derselben die Durchschnittskurve, da bei ihr die Koordinaten x', y', z' einerlei Werth in beiden Flächen haben. Durch Fortschaffung von je einer der drei veränderlichen x', y', z' zwischen beiden Gleichungen, ergibt sich die Projektion dieser Kurve auf einer der drei koordinirten Ebenen: und da diese Gleichungen für die Projektionen nur zwei veränderliche Größen enthalten, daher als Gleichungen für die Cylinder, welche auf diesen Projektionen und den zugehörigen koordinirten Ebenen senkrecht stehen, angesehen werden können, so läßt sich jede Kurve im Raume als der Durchschnitt zweier Cylinder betrachten.

479. Führt man durch zwei Punkte einer doppelt gekrümmten Kurve, deren Koordinaten in Bezug auf ein rechtwinkliges System x, y, z und $x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z$ sind, eine Gerade, und bezeichnet die veränderlichen Koordinaten eines jeden ihrer Punkte mit x', y', z'; so sind nach (445) die Gleichungen dieser Geraden

$$x' - x = \frac{\partial x}{\partial z}(z' - z), \quad y' - y = \frac{\partial y}{\partial z}(z' - z) \quad \mu)$$

Je mehr man aber beide Punkte zusammenrücken läßt, desto mehr nähert sich die durch die Gleichungen μ) vorgestellte Sekante der Kurve ihrer Tangente, da letztere von den Werthen der Größen ∂x, ∂y, ∂z, welche den Abstand beider Punkte bedingen, unabhängig ist; sonach sind die Gleichungen für die Tangente einer Kurve im Raume

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \text{ und } y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z) \quad 737)$$

Heißen α, β, γ die Winkel der Berührenden mit den Koordinatenaxen, so erhält man aus 715), wenn man $\frac{dx}{dz}$ statt a, und $\frac{dy}{dz}$ statt a' substituirt,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}, \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}},$$
$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} \quad 738)$$

Die Gleichungen einer Geraden, welche im Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht steht, sind nach (313) und 737)

$$x' - x = -\frac{dz}{dx}(z' - z), y' - y = -\frac{dz}{dy}(z' - z) \quad 739)$$

und die Winkel, welche sie mit den Koordinatenaxen bildet, sind Ergänzungen der Winkel α, β, γ in 738) zu 90 Graden.

480. Seien $x = fz$, $y = \varphi z$ die Gleichungen einer Kurve im Raume, ferner $x_1 = Fz_1$, $y_1 = \psi z_1$ die Gleichungen einer anderen Kurve, die mit der ersteren einerlei Anfangspunkt hat, und auf dieselben Axen bezogen wird. Wenn sich beide Kurven schneiden, so ist für diesen Durchschnittspunkt $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, also $x = Fz$, und $y = \psi z$: für jeden anderen Punkt, der mit der Ordinate $z + h$ zusammenhängt, sind die Koordinaten x, und y beziehungsweise $f(z + h)$, $\varphi(z + h)$, und die Koordinaten x_1, y_1 in der anderen Kurve $F(z + h)$, $\psi(z + h)$. Man bezeichne Kürze halber $f(x + h) - F(z + h)$ mit d, und $\varphi(z + h) - \psi(z + h)$ mit d_1, so ergibt sich nach 414) der Abstand D der Punkte, welche derselben Ordinate $z + h$ in beiden

Kurven zugehören, nämlich $D = \sqrt{(d^2 + d_1^2)}$, und hieraus läßt sich wie (363) zeigen, daß sobald $f_1 z = F_1 z$, $\varphi_1 z = \psi_1 z$, keine dritte Kurve zwischen diesen beiden gezogen werden kann, wenn sie nicht denselben Bedingungsgleichungen Genüge leistet: hat man überdieß $f_2 x = F_2 x$, und $\varphi_2 z = \psi_2 z$, so berühren sich die beiden Kurven inniger als jede andere Kurve, bei welcher nicht dieselben Bedingungen Statt finden, u. s. f. Hiernach unterscheidet man die verschiedenen Berührungsgrade zweier Kurven in Ordnungen, und bestimmt die in den Gleichungen der Kurven vorkommenden Konstanten so, daß sie jenen Bedingungen, welche mit der Berührung irgend einer Ordnung verbunden sind, Genüge leisten.

481. Seien $x' = az' + b$, $y' = a'z' + b'$ ν) die Gleichungen einer Geraden, welche mit einer Kurve im Raume an dem Punkte, dessen Lage durch durch die Koordinaten x, y, z gegeben ist, eine Berührung der ersten Ordnung haben soll; so erhält man folgende vier Gleichungen:
$x = az + b$, $y = az' + b'$ ϱ) $dx = a\,dz$, $dy = a'dz$ σ). Setzt man die Werthe von a und a' aus σ) in ϱ), und die hieraus für b, b' sich ergebenden Werthe in die Gleichungen ν); so folgt

$$x' = \frac{dx}{dz}z' + x - \frac{dx}{dz}z, \; y' = \frac{dy}{dz}z' + y - \frac{dy}{dz}z$$

oder $x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z)$, $y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z)$ wie 737): woraus hervorgeht, daß eine die Kurve berührende Gerade mit derselben eine Berührung der ersten Ordnung bildet.

482. Wir wollen jetzt den Kreis bestimmen, welcher mit einer doppelt gekrümmten Kurve eine Berüh-

rung der zweiten Ordnung hat. Man kann den Kreis als den Durchschnit einer Kugel mit einer durch den Mittelpunkt derselben geführten Ebene betrachten: bezeichnet man mit g, h, i die Koordinaten des Mittelpunktes, und mit R den Halbmesser der Kugel, so ist ihre Gleichung $(x'-g)^2+(y'-h)^2+(z'-c)^2=R^2$, während die Gleichung einer Ebene

$Ax'+By'+Cz'+D=0$, da sie durch den Mittelpunkt der Kugel gezogen ist, in

$A(x'-g)+B(y'-h)+C(z'-i)=0$ übergeht, und man kann sie dadurch etwas einfacher machen, daß man durchgängig mit C dividirt, und die Koeffizienten

$\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ mit m, n bezeichnet, hiedurch entsteht

$m(x'-g)+n(y'-h)+z'-i=0$. Nach dem in (480) angegebenen Verfahren, muß der Kreis mit der vorgelegten Kurve nicht allein den Berührungspunkt x, y, z gemein haben, sondern es müssen auch die ersten und zweiten Differentialquotienten, welche sich aus der Gleichung des Kreises ergeben, den Differentialquotienten, welche man aus der Gleichung der Kurve erhält, gleich sein. Dieß gibt folgende sechs Gleichungen:

$$(x-g)^2+(y-h)^2+(z-i)^2=R^2 \quad \lambda)$$
$$m(x-g)+n(y-h)+z-i=0 \quad \mu)$$
$$(x-g)\,dx+(y-h)\,dy+(z-i)\,dz=0 \quad \nu)$$
$$m\,dx+n\,dy+dz=0 \quad \varrho)$$
$$dx^2+dy^2+dz^2+(x-g)\,d^2x+(y-h)\,d^2y+(z-i)\,d^2z=0 \quad \sigma)$$
$$m\,d^2x+n\,d^2y+d^2z=0 \quad \tau)$$

Setzt man zur Abkürzung: $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$,

$$dy\,d^2z-dz\,d^2y=p,\ dz\,d^2x-dx\,d^2z=q,$$
$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=r$$

so erhält man aus $\varrho)$ und $\tau)$

$m = \frac{p}{r}$, $n = \frac{q}{r}$: dadurch wird μ)

$$p(x-g) + q(y-h) + r(z-i) = o \quad \vartheta)$$

Aus ϑ) ν) und σ) folgt nun:

$$(y-h)(q\,dx - p\,dy) + (z-i)(r\,dx - p\,dz) = o \quad \varepsilon)$$

$$-(y-h)\,r + (z-i)\,q = ds^2\,dx,$$ hieraus und aus ε) erhält man:

$$(z-i)(r^2\,dx - pr\,dz + q^2\,dx - pq\,dy) = ds^2\,dx\,(q\,dx - p\,dy)$$

allein $r\,dz + q\,dy = dx\,dz\,d^2y - dx\,dy\,d^2z = -p\,dx$

hiedurch wird $z - i = \frac{ds^2(q\,dx - p\,dy)}{p^2+q^2+r^2}$: und durch Vertauschung der Buchstaben erhält man hieraus

$$y - h = \frac{ds^2(p\,dz - r\,dx)}{p^2+q^2+r^2}, \quad x - g = \frac{ds^2(r\,dy - q\,dz)}{p^2+q^2+r^2} \quad 740)$$

Es ist aber, wie man sich durch leichte Rechnung überzeugt,

$$p^2 + q^2 + r^2 = ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2) = k^2\,ds^2$$

$$q\,dx - p\,dy = -ds^2 \cdot d\frac{dz}{ds}, \quad p\,dz - r\,dx = -ds^2 \cdot d\frac{dy}{ds} \text{ und}$$

$$r\,dy - q\,dz = -ds^2 \cdot d\frac{dx}{ds}:$$ setzt man diese Werthe in die Gleichungen 740), so wird

$$x - g = \frac{-ds^2\,d\frac{dx}{ds}}{k^2}, \quad y - h = \frac{-ds^2\,d\frac{dy}{ds}}{k^2}, \quad z - i = \frac{-ds^2\,d\frac{dz}{ds}}{k^2} \quad 741)$$

mit diesen Werthen wird die Gleichung λ)

$R = \frac{\pm ds^2}{k}$. Setzt man ds beständig, also $d^2s = o$, so 742) heißen diese Ausdrücke:

$$x - g = -\frac{ds^2 d^2x}{k^2}, \quad y - h = -\frac{ds^2 d^2y}{k^2}$$

$$z - i = -\frac{ds^2 d^2z}{k^2}, \quad R = \frac{ds^2}{k} \quad 743)$$

Setzt man aber dz beständig, also $d^2z = 0$, so hat man

$$x - g = \frac{ds\,(d^2s\,dx - d^2x\,ds)}{dz^4\,k^2}, \quad y - h = \frac{ds\,(d^2s\,dy - d^2y\,ds)}{dz^4\,k^2},$$

$$z - i = \frac{ds.\,d^2s}{dz^3\,k^2}, \quad R = \pm\frac{ds^2}{dz^2\,k} \qquad 744)$$

483. Sei s ein in dem Punkte x, y, z sich endigender Bogen einer im Raume verzeichneten Kurve, und σ die Projektion desselben auf die Ebene xy; so liegen s und σ in einer auf die Ebene xy senkrecht stehenden Cylinderfläche: wird diese in eine Ebene ausgebreitet, so verwandelt sich σ in eine gerade Linie, welche als Abscissenlinie für s angenommen werden kann, und es entsprechen dann dem Endpunkte von s die rechtwinkligen Koordinaten σ und z; man hat sonach 512) $ds = \sqrt{(d\sigma^2 + dz^2)}$; aber σ ist in seiner ursprünglichen Gestalt der Bogen einer ebenen Kurve, dessen Endpunkte die rechtwinkligen Koordinaten x, y haben, und daher $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$; es ist demnach

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}. \qquad 745)$$

Ferner gibt die Formel 529)

$Fx = \int\sigma\,dz = \iint\sqrt{(dx^2 + dy^2)}\,dz$, als Inhalt der 746) von dem Bogen s, seiner Projektion σ und dem Perpendikel z eingeschlossenen Fläche.

484. Wird auf einen Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche vom Halbmesser AC = a (Fig. 44) ein Faden AM so aufgewunden, daß die senkrechte Entfernung MN jedes Punktes desselben von der Grundfläche dem Kreisbogen AN proportionirt ist, so entsteht eine Kurve mit doppelter Krümmung, welche man die Schraubenlinie nennt. Zieht man CX senkrecht auf AC, und setzt CP = x, PN = y, MN = z, ACN = v = CNP, so ist $x = a\sin v$, $y = a\cos v$; also durch Umkehrung

dieser Gleichungen $v = \text{arc. } sin \frac{x}{a} = \text{arc. } cos \frac{y}{a}$, ferner hat man, wenn k eine Konstante vorstellt $MN = k.AN$ oder $z = akv$, mithin

$$z = ak \text{ arc. } sin \frac{x}{a}, \text{ und } z = ak \text{ arc. } cos \frac{y}{a} \quad 747)$$

die Gleichungen der Schraubenlinie.

Nennt man ϱ den Winkel AMN, so ist

$\frac{dAN}{dz} = tg\varrho$, allein es ist $AN = av$, mithin $tg\varrho = \frac{1}{k}$ unveränderlich; sonach hat der Faden in allen Punkten gegen die Grundfläche dieselbe Neigung. Heißt s der Bogen AM, so ist $ds^2 = (dAN)^2 + dz^2$, oder $ds = adv\sqrt{(1+k^2)}$, und daher

$$s = \frac{av}{sin\varrho} = \frac{z}{cos\varrho} = z\, sec\, \varrho, \quad 748)$$

XIII. Berührung und Komplanation der Flächen.

485. Sei $Ax' + By' + Cz' + D = o$ die Gleichung einer Ebene, welche durch 3 Punkte einer krummen Fläche gezogen wird, deren Koordinaten sind x, y, z, ferner $x + \delta x$, y, $z + \delta z$, und x, $y + \delta y$, $z + \delta z$; so hat man folgende Bedingungsgleichungen:

$Ax + By + Cz + D = o$

$A(x + \delta x) + By + C(z + \delta z) + D = o$ $\lambda)$

$Ax + B(y + \delta y) + C(z + \delta z) + D = o$ $\mu)$

Die erste derselben gibt mit der allgemeinen Gleichung der Ebene und mit den zwei folgenden Gleichungen $\lambda)$ und $\mu)$ verbunden

$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = o$, $\nu)$

$A\delta x + C\delta z = o$, und $B\delta y + C\delta z = o$, woraus

$\frac{A}{C} = -\frac{\partial z}{\partial x}$, und $\frac{B}{C} = -\frac{\partial z}{\partial y}$ folgt. Führt man diese Werthe in die Gleichung ν) ein, so erhält man die Gleichung der durch die angegebenen drei Punkte gezogenen Ebene

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y)$$

Die schneidende Ebene geht aber in eine die Fläche berührende Ebene über, wenn die Punkte zusammenrücken; daher ist die Gleichung der zu dem Punkte x, y, z gelegten Berührungsebene der Fläche

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y) \qquad 749)$$

Bei einem Ellipsoid, dessen Gleichung 722) ist, hat man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{c^2 y}{b^2 z}, \text{ folglich}$$

$$z' - z = -\frac{c^2 x}{a^2 z}(x' - x) - \frac{c^2 y}{b^2 z}(y' - y), \text{ oder}$$

$$\frac{z'z}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{xx'}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}, \text{ und hierin statt}$$

$\frac{z^2}{c^2}$ seinen Werth aus 722) gesetzt, wird

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1 \qquad 750)$$

die Gleichung einer das Ellipsoid tangirenden Ebene. Die Bestimmung der verschiedenen Krümmungen der Flächen findet man V. II. 125.

486. Sei $z = f(x, y)$ die Gleichung einer Fläche: man gedenke sich zu der Ebene yz in den Abständen x und $x + \partial x$, und zu der Ebene xz in den Abständen y und $y + \partial y$ parallele Ebenen geführt, so bestimmen dieselben auf der krummen Fläche eine vierseitige Figur, deren Oberfläche berechnen, die Fläche **komplaniren**

heißt. Die Projektion dieser Figur auf die Ebene xy hat offenbar den Werth $dx.dy$. Zieht man an den Punkt x, y, z eine tangirende Ebene, und verlängert jene parallelen Ebenen bis sie die Berührungsebene schneiden, so wird die von ihnen auf der letzteren begrenzte ebene Figur von der korrespondirenden Figur auf der krummen Fläche desto weniger unterschieden sein, je kleiner die Abmessungen dx, dy sind: läßt man nun diese Größen ohne Ende abnehmen, und bezeichnet mit F die zu komplanirende Fläche, also mit d^2F ihr zwischen den genannten Ebenen eingeschlossenes Stück, und mit λ den Neigungswinkel der tangirenden Ebene gegen die Ebene xy, so ist $dx\,dy = d^2F\cos\lambda$, oder weil λ zugleich der Winkel der Normale mit der Axe der z ist, also vermög 683)

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+a'^2)}},\quad \text{wobei } a = \frac{dz}{dx} = p,\ a' = \frac{dz}{dy} = q$$

ist, so hat man $dx\,dy = \frac{d^2F}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$, daher

$$F = \iint dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)}. \qquad 751)$$

487. Kann eine krumme Fläche durch Umdrehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene befindliche Gerade, welche als Axe der x gelten soll, erzeugt werden, so läßt sich das zwischen zweien, auf dieser Geraden senkrecht stehenden Ebenen enthaltene Stück der Fläche durch eine einzige Integration bestimmen. Sei AMM' (Fig. 15) die Kurve, $AP = x$, $PM = y = fx$, $PP' = k$, also $P'M' = f(x+k)$, so ist (368) der Bogen MM' seiner Größe nach zwischen den Tangenten MB und M'T' enthalten. Heißt also die krumme Oberfläche vom Bogen AM erzeugt Fx, und die bei der Umdrehung von MM' beschriebene $F(x+k) - Fx$, so ist die einen ab-

gekürzten Kegelmantel bildende Oberfläche deren Seite MB vorstellt

$= (PM + P'B)\pi . BM = [2fx + kf_1x]\pi k\sqrt{[1+(f_1x)^2]}$,

und die ebenfalls einen abgekürzten Kegelmantel bildende Oberfläche, deren Seite CM ist, $= (PM + P'C)\pi . CM = [2fx + kf_1(x+k)]\pi k\sqrt{[1+(f_1(x+k))^2]}$, folglich

$$F(x+k)-Fx \begin{cases} < [2fx + kf_1x]\pi k\sqrt{[1+f_1x)^2]}, \text{ und} \\ > [2fx + kf_1(x+k)]\pi k\sqrt{[1+f_1(x+k))^2]} \end{cases}$$

daher wird für ein Stück von k, welches k' heißen mag

$F(x+k)-Fx = [2fx+kf_1(x+k')]\pi k\sqrt{[1+(f_1(x+k'))^2]}$

entwickelt man $F(x+k)$ mittelst der Tellor'schen Reihe, dividirt dann durch k, und setzt zuletzt $k = o$, womit zugleich k' verschwindet, so erhält man

$F_1x = 2\pi fx\sqrt{[1+(f_1x)^2]}$, und hieraus folgt

$$Fx = 2\pi\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)} \qquad 752)$$

488. Ist der erzeugende Bogen ein Kreis, der sich um eine in seiner Ebene in dem Abstande a vom Mittelpunkte liegende Axe drehet, so ist diese zur Abscissenlinie und eine darauf durch den Mittelpunkt des Kreises gezogene Senkrechte zur Ordinatenaxe angenommen, die Ordinate irgend eines Punktes $y = a \pm \sqrt{(r^2-x^2)}$, woraus $r^2 = x^2 + (y-a)^2$, oder $r^2 = x^2 + (a-y)^2$ folgt, je nachdem man den Punkt außerhalb der Axe und des ihr parallelen Durchmessers, oder innerhalb derselben annimmt. Man hat nun

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}, \text{ also } Fx = 2\pi r\int\frac{ydx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$$

nämlich nach 331) $Fx = 2ar\pi \operatorname{arc.}\sin\frac{x}{r} \pm 2\pi rx$ 753)

wo die Konstante null ist, weil die Oberfläche mit der Abscisse verschwindet. Setzt man $x = r$, so ergibt sich die Oberfläche des von dem Quadranten erzeugten Körpers $ar\pi^2 \pm 2r^2\pi$: das Doppelte hievon gibt die vom

Halbkreise beschriebene Oberfläche $2 a r \pi^2 \pm 4 r^2 \pi$ 754)
welche für $a = o$ die Kugeloberfläche $= 4 r^2 \pi$ gibt. 755)
Nimmt man diesen Ausdruck zuerst mit dem oberen, und dann mit dem unteren Zeichen; so gibt ihre Summe die von dem ganzen Kreis beschriebene ringförmige Oberfläche $= 4 a r \pi^2$: ihr Unterschied hingegen ist 756)
$8 r^2 \pi$ gleich der doppelten Oberfläche einer mit dem 757)
Halbmesser r beschriebenen Kugel, wie es auch sein muß, weil jeder der zwei Halbkreise eine Kugel beschreibt.

489. Bei der Ellipse hat man nach 506)

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}, \text{ daher}$$

$$Fx = \frac{2\pi b}{a} \int \sqrt{(a^2 - e^2 x^2)}\, dx, \text{ welches nach 360) gibt}$$

$$Fx = \frac{\pi b}{a} \left[x \sqrt{(a^2 - e^2 x^2)} + \frac{a^2}{e} \text{arc. } sin \frac{ex}{a} \right] \quad 758)$$

wo keine Konstante hinzukömmt, weil die Fläche mit x verschwindet. Für $x = a$ entsteht hieraus

$Fa = \pi b \left(b + \frac{a}{e} \text{arc. } sin\, e\right)$: das Doppelte hievon, gibt die gewölbte Oberfläche, welche die Ellipse bei ihrer Umdrehung um die Hauptaxe 2a beschreibt

$$= 2\pi b \left(b + \frac{a}{e} \text{arc. } sin\, e\right). \quad 759)$$

Ist $b = a$, also $e = o$, so wird sie $4 \pi a^2$ wie vorhin, weil nach (230) $\frac{a}{e} \text{arc. } sin\, e$ für $e = o$, in a übergeht.

490. Die beschreibende Linie sei eine Parabel, die sich um ihre Axe dreht; so hat man wegen 504)
$Fx = \pi \int dx \sqrt{(4px + p^2)}$, welches nach 295) integrirt gibt
$Fx = \frac{\pi \sqrt{(4px + p^2)^3}}{6p}$: verschwindet nun die Fläche

mit x, so hat man die Konstante $= -\frac{1}{6}\pi p^2$, mithin die Oberfläche des paraboliſchen Körpers

$= \frac{1}{6}\pi\left[\frac{\sqrt{(4px+p^2)^3}}{p} - p^2\right]$. Dreht ſich aber 760)

die Parabel um die Ordinatenaxe, ſo hat man

$Fx = \pi\int dx\sqrt{(4x^2+px)}$: man ſetze $p = 8a$, hiedurch wird

$Fx = 2\pi\int dx\sqrt{(x^2+2ax)}$, und nach 334)

$$Fx = \pi\left[(a+x)\sqrt{(x^2+2ax)} - a^2\lambda\frac{a+x+\sqrt{(x^2+2ax)}}{a}\right]$$

761)

491. Die beſchreibende Linie ſei eine Hyperbel, die ſich um ihre Axe dreht, ſo hat man wegen 511)

$Fx = \frac{2\pi b}{a}\int dx\sqrt{(e^2x^2 - a^2)}$, und nach 359)

$$Fx = \frac{2\pi b}{a}\left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{(e^2x^2-a^2)} - \frac{a^2}{2e}\lambda(ex+\sqrt{(e^2x^2-a^2)})\right]$$

da das Integral für $x = a$ verſchwinden ſoll, ſo hat man die Konſtante $= -\pi b^2(\pi ab : e)\lambda(ae+b)$, ſonach ergibt ſich

$$Fx = \frac{2\pi b}{a}\left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{(e^2x^2-a^2)} - \frac{a^2}{2e}\lambda\frac{ex+\sqrt{(e^2x^2-a^2)}}{ae+b}\right] - \pi b^2$$

762)

Dreht ſich aber die Hyperbel um ihre Tangente im Scheitel, ſo iſt vermög 508)

$$\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy^2} = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{b^4x^2} = \frac{a^4y^2+a^2b^2y^2+a^2b^4}{b^4x^2}$$

alſo für $c^2 = a^2+b^2$, wird

$\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dy^2}} = \frac{a^2(c^2y^2+b^4)}{b^4x^2}$; ſonach

$Fx = \frac{2a\pi}{b^2}\int dy\sqrt{(c^2y^2+b^4)}$, und nach 359), wenn

die Fläche mit x verschwindet

$$Fx = \frac{\pi a y}{b^2} \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)} + \frac{\pi a b^2}{c} \lambda \frac{cy + \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}{b^2} \quad 763)$$

Man setze $\frac{cy}{b^2} = tg\,\varphi$, so ist $\frac{c^2 y^2 + b^4}{b^4} = sec^2\,\varphi$: sei ferner α der Winkel der Asymptoten mit der Axe, so ist $\frac{ay}{b^2} = \frac{a}{c} tg\,\varphi = cos\,\alpha\, tg\,\varphi$, dadurch wird

$Fx = \pi b^2 cos\,\alpha\,[tg\,\varphi\, sec\,\varphi + \lambda\,(tg\,\varphi + sec\,\varphi)]$, oder

$Fx = \pi b^2 cos\,\alpha\,[tg\,\varphi\, sec\,\varphi + \lambda\, tg\,(45° + \frac{1}{2}\varphi)]$ 764)

492. Bei dem cykloidalischen Bogen EM (Fig. 28), der sich um die Axe EG dreht hat man, indem man in 580) $-p$ statt p setzt, d. h. die Abscissen auf der Axe vom Scheitel abwärts zählt,

$$q = r\,arc.\,cos\frac{r-p}{r} + \sqrt{(2pr - p^2)},$$ es ist aber

$arc.\,cos\frac{r-p}{r} = z$ gesetzt, $\frac{r-p}{r} = cos\,z$, und

$1 - \frac{r-p}{r} = sinv\,z = \frac{p}{r}$, daher $z = arc.\,sinv\frac{p}{r}$, mithin

$$q = r\,arc.\,sinv\frac{p}{r} + \sqrt{(2pr - p^2)} \quad 765)$$

und für diesen Werth von q gibt die Formel 752)

$Fp = 2\pi \int q \sqrt{(dp^2 + dq^2)}$, oder wegen 583)

$$Fp = 2\pi \sqrt{2r}\left[r\int\frac{dp}{\sqrt{p}}\,arc.\,sinv\frac{p}{r} + \int dp\sqrt{(2r - p)}\right]$$

das Integrale des ersten Theils ergibt sich durch theilweise Integration

$2r\sqrt{p}\,arc.\,sinv\,(p:r) + 4r\sqrt{(2r - p)}$, das Integrale des zweiten Theils ist aus 295) $-\frac{2}{3}(2r - p)^{\frac{3}{2}}$, daher erhält man

$$Fp = 4r\pi\sqrt{2pr}\,\text{arc.}\,sinv\,\frac{p}{r} + \tfrac{4}{3}(4r+p)\pi\sqrt{2r(2r-p)} + C$$

und weil dieser Ausdruck für $p = o$ den Werth erhält $\frac{16}{3} r\pi . 2r + C$, so ist $C = -\frac{32}{3} r^2\pi$, und

$$Fp = 4\pi[r\sqrt{2rp}\,\text{arc.}\,sinv\,\frac{p}{r} + \tfrac{1}{3}(4r+p)\sqrt{(2r-p)} - \tfrac{8}{3}r^2] \quad 766)$$

Setzt man hier $p = 2r$, so folgt die Oberfläche des durch die Cykloide um die Axe erzeugten Körpers

$$= (8\pi - \tfrac{32}{3})\,r^2\pi. \quad 767)$$

XIV. Inhalt der durch krumme Flächen eingeschlossenen Körper.

493. Der Ausdruck $\int y\,dx$ bezeichnet nach 529) eine Fläche, welche durch einen Bogen der Kurve, deren Gleichung $y = fx$ ist, durch die Abscisse x und durch die Ordinate y eingeschlossen ist. Denkt man sich über der Ebene dieser Kurve einen Körper, welcher in der Ebene xy von dieser Fläche begrenzt wird, so gibt $dz\int y\,dx$ das Element dieses Körpers, also $\int dz\int y\,dx$ den Inhalt desselben, oder den Raum, welchen die Oberfläche des ganzen Körpers einnimmt. Da jedoch y mit $\int dy$ gleichgeltend ist, und man die Integrationen im Produkte in willkührlicher Ordnung vornehmen kann, so erhält man für den Inhalt eines Körpers den Ausdruck

$$J = \iiint dx\,dy\,dz \quad 768)$$

494. Die Gleichung eines Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c ist nach 723)
$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$; und gibt für einen in dem Abstande z der Ebene xy parallelen Schnitt eine Ellipse, deren Gleichung
$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}(c^2 - z^2)$ ist: hält man diesen

Ausdruck gegen die Gleichung einer Ellipse 455); so sind ihre beiden Halbaxen

$$\frac{b}{c}\sqrt{(c^2-z^2)} \text{ und } \frac{a}{c}\sqrt{(c^2-z^2)}$$

daher nach 532) die Oberfläche dieser Ellipse

$$\int y\,dx + \pi\frac{ab}{c^2}(c^2-z^2): \text{ dieß gibt}$$

$$\int dz \int y\,dx = J = \pi\frac{ab}{c^2}(c^2 z - \tfrac{1}{3}z^3) \qquad 769)$$

wo die Konstante Null ist, weil der Inhalt mit z verschwindet. Für $z = c$ folgt hieraus der Inhalt des halben Ellipsoids $\frac{2}{3}\pi abc$, und der Inhalt des ganzen Ellipsoids

$$J = \tfrac{4}{3}\pi abc \qquad 770)$$

Für ein Ellipsoid mit zwei gleichen Halbaxen $b = c$ welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die Axe a erzeugt wird, hat man

$$J = \tfrac{4}{3}\pi ab^2 \qquad 771)$$

Ist aber $a = b = c$, so geht das Ellipsoid in eine Kugel über, deren Inhalt daher $\frac{4}{3}\pi a^3$ ist. 772)

495. Wird eine Pyramide von einer beliebigen Basis B durch eine, derselben parallele, Ebene geschnitten, so ist bekanntlich der Durchschnitt b der Basis ähnlich: bezeichnet man mit z den Abstand beider Flächen, und mit h die Höhe der Pyramide, so hat man nach einem gleichfalls bekannten Satze

$$B : b = h^2 : (h-z)^2, \ \mu) \text{ woraus}$$

$$b = \frac{B(h-z)^2}{h^2}, \text{ also } J = \int b\,dz = \frac{B}{h^2}\int (h-z)^2\,dz$$

folgt: dieß gibt $J = \frac{B}{h^2}(h^2 z - hz^2 + \frac{1}{3}z^3)$, und für

$$z = h \qquad J = \tfrac{1}{3}Bh \qquad 773)$$

Heißt a die Höhe der abgekürzten Pyramide, ihr Inhalt K, und x die Höhe der Ergänzungspyramide, k ihr Inhalt; so gibt die Proportion μ)

$$B : b = (a+x)^2 : x^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a(b+\sqrt{Bb})}{B-b}, \quad a+x = \frac{a(B+\sqrt{Bb})}{B-b}$$

$$k = \tfrac{1}{3}\,\frac{ab(b+\sqrt{b})}{B-b} \text{ folgt,}$$

daher ist $K = J - k = \tfrac{1}{3}a(B+b+\sqrt{Bb})$ 774)

496. Man bezeichne bei einem senkrechten Kegel mit kreisförmiger Basis den Halbmesser der Basis mit a, die Höhe der Spitze des Kegels mit h, so ist für irgend einen in dem Abstande z der Basis parallel geführten Schnitt, nach μ)

$$a^2\pi : (x^2+y^2)\pi = h^2 : (h-z)^2, \text{ also}$$

$a^2(h-z)^2 = h^2(x^2+y^2)$, die Gleichung der Oberfläche des Kegels: man erhält hieraus

$z = \frac{b}{a}[a-\sqrt{(x^2+y^2)}]$, und der Inhalt eines der Ebene yz parallelen Schnittes

$$\int z\,dy = \frac{b}{a}\int dy\,[a-\sqrt{(x^2+y^2)}], \text{ nach 359)}$$

$$= \frac{b}{a}[ay - \tfrac{1}{2}y\sqrt{(x^2+y^2)} - \tfrac{1}{2}x^2\lambda(y+\sqrt{(x^2+y^2)})]$$

Wird dieses Integral von $y = o$, bis $y = \sqrt{(a^2-x^2)}$ genommen, so hat man

$$\int z\,dy = \tfrac{1}{2}b\sqrt{(a^2-x^2)} - \frac{bx^2}{2a}\lambda\frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x};$$

multiplizirt man diesen Ausdruck mit dx, und integrirt hierauf die einzelnen Glieder, so erhält man nach 360)

$$\tfrac{1}{2}b\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \tfrac{1}{4}bx\sqrt{(a^2-x^2)} + \tfrac{1}{4}a^2b\,\text{arc.}sin\frac{x}{a},$$

und durch theilweise Integration, da

$$d\lambda\frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = -\frac{a\,dx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}} \text{ ist, erhält man}$$

nach 365)

$$\frac{b}{2a}\int x^2\,dx\,\lambda\frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}=\frac{bx^3}{6a}\lambda\frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

$$-\tfrac{1}{12}bx\sqrt{(a^2-x^2)}+\tfrac{1}{12}a^2b\,\text{arc. }sin\frac{x}{a}.\quad\text{Dieß gibt}$$

$$J=\int dx\int z\,dy=\tfrac{1}{6}bx\sqrt{(a^2-x^2)}$$
$$+\tfrac{1}{6}a^2b\,\text{arc. }sin\frac{x}{a}-\frac{bx^3}{6a}\lambda\frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

775)

für den Inhalt des zwischen zwei auf der Axe der x senkrechten Ebenen, deren eine durch den Mittelpunkt gezogen ist, enthaltenen Kegelstückes: setzt man nun $x=a$, so erhält man den vierten Theil des Kegels $=\frac{1}{12}\pi a^2 b$, und den Inhalt des ganzen Kegels

$$J=\tfrac{1}{3}\pi a^2 b \qquad 776)$$

497. Entsteht der Körper durch die Umdrehung einer Kurve, deren Gleichung $z=fx$ ist, so sind alle Schnitte derselben mit einer zur xy parallelen Ebene Kreise vom Halbmesser x, es ist also für solche Körper $\int\int dx\,dy=x^2\pi$, und daher ihr Inhalt

$$J=\pi\int x^2\,dz \qquad 777)$$

Dreht sich z. B. eine Parabel um ihre Abscissenaxe, so ist $x^2=pz$, also $J=p\pi\int z\,dz=\frac{1}{2}p\pi z^2=\frac{1}{2}\pi x^2 z$ 778) das Paraboloid ist daher halb so groß, als ein Cylinder, dessen Grundfläche die Abscisse x zum Halbmesser hätte, und dessen Höhe die Ordinate z wäre. Dreht sich aber die Parabel um die Ordinatenaxe, wodurch ein kegelartiger Körper mit konkaver Oberfläche zum Vorschein kommt, so hat man

$$J=\pi\int z^2\,dx=\pi\int\frac{x^4\,dx}{p^2}=\tfrac{1}{5}\pi\frac{x^5}{p^2}=\tfrac{1}{5}\pi xz^2 \qquad 779)$$

498. Die Gleichung der Hyperbel, deren Anfangspunkt im Scheitel liegt, ist nach 463)

$$\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)=y^2, \text{ daher}$$

$$J=\frac{\pi b^2}{a^2}\int(2ax+x^2)\,dx=\frac{\pi b^2}{a^2}(ax^2+\tfrac{1}{3}x^3) \quad 780)$$

Es drehe sich die Hyperbel um ihre zweite Hauptaxe, so entsteht ein hohler cylinderartiger Körper dessen Innhalt

$$\pi\int x^2\,dy=\frac{a^2\pi}{b^2}\int(b^2+y^2)\,dy=\frac{a^2\pi}{b^2}(b^2y+\tfrac{1}{3}y^3) \quad 781)$$

Dreht sich aber dieselbe um eine ihrer Asymptoten CR (Fig. 14), und man fällt Ap, Mn auf CR senkrecht, so ist $CN=x$, $Mn=y$, $Ap=r$, $AD=k$ und $RCR'=\varphi$ gesetzt, $MN\,sin\,\varphi=Mn=Nn\,tg\,\varphi$, sonach wegen 498)

$CS\times SM=MN\times CN=\frac{1}{4}(a^2+b^2)=k^2$ oder

$$\frac{y}{sin\,\varphi}(x-\frac{y}{tg\,\varphi})=k^2, \text{ d. i. } k^2 sin^2\varphi=xy\,sin\varphi-y^2 cos\varphi,$$

aber $k\,sin\,\varphi=r$, mithin

$x=\dfrac{r^2}{y\,sin\,\varphi}+\dfrac{y\,cos\,\varphi}{sin\,\varphi}$. Nun ist der von ApnM beschriebene Körper $=\pi\int y^2\,dx$, und

$$dx=dy\left(\frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi}-\frac{r^2}{y^2\,sin\,\varphi}\right), \text{ daher}$$

$$J=\pi\int\left(\frac{y^2\,cos\,\varphi}{sin\,\varphi}-\frac{r^2}{sin\,\varphi}\right)dy=-\frac{\pi y}{3\,sin\,\varphi}(3r^2-y^2 cos\varphi):$$

da das Integral verschwindet, wenn $y=Ap=r$ wird, so ist $C=\dfrac{\pi r^3\,(3-cos\,\varphi)}{3\,sin\,\varphi}$, und sonach

$$J=\frac{\pi}{3\,sin\,\varphi}[(3-cos\,\varphi)\,r^3-3r^2\,y+y^3\,cos\,\varphi] \quad 782)$$

Der ganze in's Unendliche sich erstreckende kegelförmige Körper, dessen Axe die Asymptote vom Punkt p an ist, hat den Werth $\dfrac{\pi\,(3-cos\varphi)r^3}{3\,sin\,\varphi}$. 783)

Für die gleichseitige Hyperbel ist $\varphi=90°$, und $k=r$,

also $J = \pi k^2 (k - y)$, 784)

und der ganze kegelförmige Körper $= \pi k^2$ 785)

499. Sei der erzeugende Bogen eine Cissoide, deren Gleichung 551) ist, so hat man

$$y^2 = \frac{x^3}{-x+2a} = -x^2 - 2ax - 4a^2 + \frac{8a^3}{-x+2a}, \text{ mithin}$$

$\pi \int y^2 dx = -\frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 4a^2x - 8a^3 \lambda(2a - x)$;

da das Integral mit x verschwindet, so ist $C = 8a^3 \lambda 2a$,

also $J = \pi(8a^3 \lambda \frac{2a}{2a-x} - \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 4a^2x)$ 786)

500. Ein Kreisbogen, dessen Halbmesser a, und Chorde 2c ist, drehe sich um diese als Axe, man verlangt den Inhalt des so erzeugten Körpers? Heißt der Abstand der Chorde von dem ihr parallelen Durchmesser b, so ist $(b+y)^2 + x^2 = a^2$ die Gleichung des Kreises, wenn die Chorde als Abscissenaxe angenommen wird; dieß gibt $(b+y)\,dy = -x\,dx$ also

$$dx = -\frac{(b+y)\,dy}{\sqrt{[a^2-(b+y)^2]}}, \text{ und } J = -\pi \int \frac{(b+y)\,y^2\,dy}{\sqrt{[a^2-(b+y)^2]}}$$

Man setze $b + y = z$, so ist $y^2 = z^2 - 2bz + b^2$, und

$$J = -\pi \int \frac{(z^2 - 2bz^2 + b^2 z)\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$$: nun hat man

nach 366)

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = -\frac{1}{2}(z^2 + 2a^2)\sqrt{(a^2 - z^2)}$$ ferner

nach 365)

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = \frac{1}{2}a^2 \text{ arc. } sin\, \frac{z}{a} - \frac{1}{2}z\sqrt{(a^2 - z^2)},$$

und nach 244)

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = -\sqrt{(a^2 - z^2)}$$; folglich ist

$$J = \pi(\tfrac{1}{3}z^2 - bz + \tfrac{2}{3}a^2 + b^2)\sqrt{(a^2 - z^2)} + \pi a^2 b \operatorname{arc.}sin\frac{z}{a} + C \quad 787)$$

da für $z = a$, $J = o$ wird, so hat man $C = -\frac{1}{2}a^2\pi^2 b$, setzt man nun $z = b$, und multiplizirt das Ergebniß mit 2, so folgt

$$J = \tfrac{2}{3}\pi(2a^2 + b^2)\,c - 2\pi a^2 b.\operatorname{arc.}cos\frac{b}{a} \quad 788)$$

Ist $b = o$, so folgt hieraus der Kubikinhalt der Kugel $\frac{2}{3}\pi.2a^2.a = \frac{4}{3}\pi a^3$ wie oben.

501. Wird die Gerade AG (Fig. 28) zur Abscissenaxe, und der Punkt A der Cykloide zum Ursprung gewählt, so hat man (410)

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ry - y^2)}}, \text{ also } \pi\int y^2 dx = \pi\int\frac{y^3\,dy}{\sqrt{(2ry - y^2)}}.$$

als Inhalt des durch die Umdrehung der Cykloide um AG erzeugten Körpers. Nun ist nach 371)

$$\int\frac{y^3\,dy}{\sqrt{(2ry - y^2)}} = -\tfrac{1}{3}y^2\sqrt{(2ry - y^2)} + \tfrac{5}{3}r\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{(2ry - y^2)}},$$

ferner nach 373)

$$\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{(2ry - y^2)}} = -\tfrac{1}{2}(y + 3r)\sqrt{(2ry - y^2)} + \tfrac{3}{2}r^2\operatorname{arc.}sinv\frac{y}{r},$$

daher

$$J = -\pi(\tfrac{1}{3}y^2 + \tfrac{5}{6}ry + \tfrac{5}{2}r^2)\sqrt{(2ry - y^2)} + \tfrac{5}{2}\pi r^3\operatorname{arc.}sinv\frac{y}{r} \quad 789)$$

Für $y = 2r$ folgt hieraus der durch eine halbe Cykloide erzeugte Körper $\frac{5}{2}8r^3\pi$, mithin der durch die ganze Cykloide beschriebene $40r^3\pi$ 790)

502. Die obere Konchoide drehe sich um die Asymptote als Axe, es wird der Inhalt des runden Körpers gesucht, der zwischen von DG und JL (Fig. 23) beschriebenen Kreisflächen liegt? Man hat 560)

$dx = -\frac{(a^2 b + y^3)dy}{y^2\sqrt{(a^2-y^2)}}$, so ist $J = -\pi\int\frac{(a^2 b+y^3)dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$

welches mit Rücksicht auf 366) gibt

$J = -\pi a^2 b \arcsin\frac{y}{a} + \frac{1}{3}\pi(2a^2+y^2)\sqrt{(a^2-y^2)}$:

da $J = 0$ für $y = a$ wird, so ist $C = \frac{1}{2}\pi^2 a^2 b$, und daher

$J = \pi a^2 b \arccos\frac{y}{a} + \frac{1}{3}\pi(2a^2+y^2)\sqrt{(a^2-y^2)}$ 791)

Der Inhalt des ganzen in's Unendliche sich erstreckenden Körpers ist $\pi a^2(\frac{1}{2}\pi b + \frac{2}{3}a)$ 792)

Hat ein Faß im Boden den Halbmesser r im Bauch den a, und ist seine Länge $= 2c$, so ist, die Krümmung der Dauben konchoidisch angenommen, aus der Koordinatengleichung $c = \frac{(b+r)\sqrt{(a^2-r^2)}}{r}$, $b = \frac{cr}{\sqrt{(a^2-r^2)}} - r$,

daher der Inhalt des Faßes

$J = 2\pi[\frac{1}{3}(2a^2+r^2)\sqrt{(a^2-r^2)} + a^2 b \arccos\frac{r}{a}]$ 793)

XV. Komplanation und Kubatur bei Polarkoordinaten.

503. Dreht sich ein Bogen AM (Fig. 45) einer durch die Polargleichung $r = fv$ vorgestellten Kurve um die Axe AO, so ist nach 700) die erzeugte Oberfläche $Fx = 2\pi\int RM\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 2\pi\int PM.ds$, nun hat man $PM = r\sin v$, und nach 537) $ds = \sqrt{(r^2 dv^2 + dr^2)}$, daher $Fx = 2\pi\int r\sin v\sqrt{(r^2 dv^2 + dr^2)}$ 794)

Der Inhalt hingegen des von der so erzeugten Fläche begrenzten Körpers K besteht aus dem durch die Umdrehung vom AM entstandenen Körper, und aus dem Kegel, den das Dreieck MOP beschreibt, sonach ist

$K = \pi\int PM^2 \times dAP + \frac{1}{3}PM^2\pi \times OP$

$$= \pi \int r^2 \sin^2 v \, d(a - r\cos v) + \tfrac{1}{3}\pi r^3 \sin^2 v \cos v,$$

oder
$$K = \tfrac{2}{3}\pi \int r^2 \sin v \, dv \qquad 795)$$

504. Bei der logarithmischen Spirale ist nach (404) $v = \lambda r$, und $r dv = dr$, $ds = dr\sqrt{2}$, daher $Fx = 2\pi\sqrt{2}\int r\,dr \sin v \; \mu)$, welches nach 353) gibt $Fx = \pi\sqrt{2}\,[r^2 \sin v - \int r^2 \cos v\, dv] \; \nu)$: setzt man aber im Ausdrucke $\mu)$ $r dv$ statt dr, und integrirt nach 353), so erhält man

$$Fx = 2\pi\sqrt{2}\int r^2 dv \sin v = 2\pi\sqrt{2}\,[-r^2\cos v + 2\int r^2 \cos v\, dv] \; \varrho)$$

Multiplizirt man nun $\nu)$ mit 4, und addirt $\varrho)$ so folgt:

$$Fx = \tfrac{2}{5}\pi r^2\sqrt{2}\,[2\sin v - \cos v] + C$$

da $Fx = 0$ für $v = 0$, so ist $C = \frac{2}{5}\pi r^2\sqrt{2}$, mithin

$$Fx = \tfrac{2}{5}\pi r^2\sqrt{2}\,[2\sin v + \sin v\, v] \qquad 796)$$

Für $v = \pi$ wird die Oberfläche $= \frac{4}{5}\pi r^2\sqrt{2}$ 797)

Der Inhalt desselben Körpers ergibt sich, wenn man 795) nach 353) integrirt

$$K = \tfrac{2}{3}\pi\,[-r^3\cos v + 3\int r^2\, dr \cos v] \; \delta)$$

und dann in 795) statt dv seinen Werth setzt, und nach 353) integrirt, wird

$$K = \tfrac{2}{3}\pi\,[\tfrac{1}{3}r^3 \sin v - \tfrac{1}{3}\int r^2\, dr \cos v] \; \tau)$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit 9, und addirt das Ergebniß zu $\sigma)$ so entsteht

$$10\,K = \tfrac{2}{3}\pi r^2\,[3\sin v - \cos v],$$

und da der Körper mit v verschwindet, so ist

$$K = \tfrac{2}{30}\pi r^3\,[3\sin v + \sin v\, v] \qquad 798)$$

Für $v = \pi$ wird $K = \frac{4}{30}\pi r^3$ 799)

Uiber die Geometrie verdienen nachgelesen zu werden:

System der analytischen Geometrie. Von Franz Xav. Moth. Prag 1828.

Lehrbuch der höheren Geometrie. Von H. W. Brandes. Leipzig 1824. 2 Bände.

Anmerkungen.

a. Zur Seite 5.

505. Ein Dezimalbruch hat allgemein die Form $\frac{K}{10^m} = K.10^{-m}$, wenn K irgend eine ganze Zahl vorstellt. Theilt man ihn von der linken zur rechten Hand in Klassen von je n Stellen ein, so kann nach der Bezeichnung in der Formel 1) ein echter Dezimalbruch so ausgedrückt werden:

$N = b.10^{-n} + c.10^{-2n} + d.10^{-3n} + \ldots l.10^{-kn}$, 800)

woraus sich wie in (3) ergibt, daß jeder Dezimalbruch, deren nziffrige Klassensumme mit $10^n - 1$, oder deren nziffrige Klassendifferenz mit $10^n + 1$ einen Faktor gemein hat, durch denselben theilbar sei.

Bei einem periodischen Dezimalbruche, findet die Wiederholung einer bestimmten Anzahl von Ziffern, die man Periode nennt, ohne Ende Statt: heißt dann n die Zahl der Ziffern einer Periode, so gibt die Formel 800), wegen $b = c = d \ldots$

$N = b(10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \ldots)$, wo die eingeklammerte Größe, als eine rekurrente Reihe der ersten Ordnung, $\frac{1}{10^n - 1}$ zum erzeugenden Bruch hat; mithin

ist $N = \frac{b}{10^n - 1}$ d. i. jeder periodische De- 801)

zimalbruch entsteht durch Verwandlung eines gemeinen Bruches, dessen Nenner die Form $10^n - 1$ hat, oder doch ein Faktor derselben ist.

Wenn die Ziffern der ersten Hälfte einer Periode die Ziffern der anderen Hälfte zu 9 ergängen, so heißt die Periode vollkommen, im Gegentheile unvoll-

kommen. Es ist leicht einzusehen, daß vollkommene Perioden zum Vorschein kommen, wenn in 801) n eine gerade Zahl bedeutet, und daß die unvollkommenen Perioden nur in gerader Anzahl vorhanden sind, und paarweise zusammengestellt mit einander Ergänzungen bilden.

506. In folgender Tafel enthält die Spalte D den Nenner eines gemeinen Bruches, die Spalte p hingegen die Anzahl der Perioden, und n die der Ziffern in einer Periode: die unvollkommenen Perioden sind mit u angedeutet.

D	p	n	D	p	n	D	p	n	D	p	n	D	p	n
3	2u	1	53	4	13	109	1	108	181	1	180	257	1	256
7	1	6	59	1	58	113	1	112	191	2	95	263	1	262
11	5	2	61	1	60	127	3	42	193	1	192	269	1	268
13	2	6	67	2u	33	131	1	130	197	2	98	271	54u	5
17	1	16	71	2u	35	137	17	8	199	2u	99	277	4u	69
19	1	18	73	9	8	139	3	46	211	7	30	281	10	28
23	1	22	79	6u	13	149	1	148	223	1	222	283	2u	141
29	1	28	83	2u	41	151	2u	75	227	2	113	293	2	146
31	2u	15	89	2	44	157	2	78	229	1	228	307	2u	153
37	12u	3	97	1	96	163	2	81	233	1	232	311	2u	155
41	8u	5	101	25	4	167	1	166	239	34u	7	313	1	312
43	2u	21	103	3	34	173	4u	43	241	8	30	317	4u	79
47	1	46	107	2u	53	179	1	178	251	5	50	331	3	110

b. Zur Seite 31.

507. Bringt man eine Zahl N auf die quadratische Form $x^2 \pm ay^2$, indem man mittelst einer Quadratzahlentafel solche Quadratzahlen bestimmt, deren Unterschied von N, oder auch von 2N, 3N, 4N . . . in zwei Faktoren auflösbar wäre, wovon der eine ein Quadrat y^2, der andere aber eine Zahl $\pm a$ ist, so sind nach Lagrange sämmtliche Theiler dieser Zahl in der Form $4az + b$ enthalten, wo man statt z alle natürlichen Zahlen bis k zu setzen hat, wofern $4ak + b$ die $\sqrt{N}$ nicht übersteigt, und wo b mehrere bestimmte Werthe hat,

die für ein gegebenes a in der vierten und fünften Tafel meines oben citirten Werkes enthalten sind. Man braucht daher nur jene Primzahlen als Theiler von N zu versuchen, welche in den für sie gefundenen quadratischen Formen vorkommen.

c. Zur Seite 55.

508. Den Werth der Lebensrente für eine 50jährige Person zu bestimmen, hat man bei 4 Prozent

$i = 1.04$, $\log. i = 0.01703 = -\log. q$, mithin

$\log. L_1 = 2.46144$ $\log. L_2 = 2.44952$
$\log. q = -0.01703$ $\log. q^2 = 0.03407$
$\log. L_1 q = 2.44441$ $\log. L_2 q^2 = 2.41545$

$\log. L_3 = 2.43705$
$\log. q^3 = 0.05110$
$\log. L_3 q^3 = 2.38595$ u. s. f.: dieß gibt

$L_1 q = 278.23$ die folgenden Glieder findet man:
$L_2 q^2 = 260.28$ 169.15 155.68 144.28 132.76 121.83
$L_3 q^3 = 243.20$ 111.47 101.66 92.38 83.64 75.41 67.68
$L_4 q^4 = 226.91$ 60.45 53.70 47.43 41.62 36.27 31.37
$L_5 q^5 = 211.40$ 26.91 22.87 19.25 16.03 13.18 10.70
$L_6 q^6 = 196.62$ 8.56 6.75 5.24 4.00 3.01 2.25 1.68
$L_7 q^7 = 182.55$ 1.28 1.02 0.80 0.62 0.47 0.36 0.27
Summe 1599.19 0.20 0.14 deren Summe 1672.37 beträgt,

sonach ist der Werth der in 46) eingeklammerten Größe 3271.56, ihr Logarithme aber ist 3.51475; subtrahirt man

hievon $\log. L = 2.47286$

so erhält man $\log. k = 1.04189$.

Man hat also $k = 11.012$ bei einem jährlichen Einkommen von 1 Gulden, und der Werth einer Lebensrente von 1000 Gulden ist für die oben erwähnte Pension 11012 Gulden.

Nach Frankör (Cours complet de mathématiques pures. Par L. B. Francoeur Paris 1828. I. 214) findet man den Werth einer Lebensrente, wenn man die

Leibrente auf die mittlere Lebensdauer berechnet. Hiernach gibt die Formel 43), wenn man
$a = 1000$, $i = 1.04$, $n = 17.74$ setzt, $k = 12532$.

d. Zur Seite 91.

Von dem ersteren Werke ist auch eine deutsche Uibersetzung vorhanden: Versuch einer Theorie der Zahlen. Von A. M. Legendre übs. von M. Creizenach Frkf. a. M. 1829.

e. Zur Seite 172.

509. Bei einer gleichseitigen Hyperbel ist $a = b$, und $x^2 - a^2 = y^2$, hiedurch verwandelt sich der Ausdruck 534) für den hyperbolischen Sektor in

$$CAM = \tfrac{1}{2} a^2 \lambda \frac{x+y}{a}. \quad \text{Man setze} \qquad 802)$$

$ACM = \tfrac{1}{2} q$, und $a = 1$, so ist $q = \lambda(x+y)$, und 803)
auch, da $x^2 - y^2 = 1$ ist, $q = \lambda(x-y)^{-1}$; man hat also, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, $e^q = x + y$, und $e^{-q} = x - y$, folglich
$x = \tfrac{1}{2}(e^q + e^{-q})$, $y = \tfrac{1}{2}(e^q - e^{-q})$. μ). Sei ACM' (Fig. 14) ein Vielfaches von ACM, oder $2\,ACM' = nq$, so ist den Formeln μ) gemäß $CP' = \tfrac{1}{2}(e^{nq} + e^{-nq})$ und $P'M' = \tfrac{1}{2}(e^{nq} - e^{-nq})$: diese einem jeden Punkte M' des hyperbolischen Sektors zugehörigen Linien, nennt Klügel beziehungsweise den hyperbolischen Kosinus und hyperbolischen Sinus, und bezeichnet sie durch $\cos h$, $\sin h$; es ist also
$\cos h\, nq = \tfrac{1}{2}(e^{nq} + e^{-nq})$, $\sin h\, nq = \tfrac{1}{2}(e^{nq} - e^{-nq})$ ν)

510. Multiplizirt man $\tfrac{1}{2}(e^q + e^{-q}) = x$ mit
$e^q + e^{-q} = 2x$, so entsteht $\tfrac{1}{2}(e^{2q} + e^{-2q}) = 2x^2 - 1$,
oder wegen ν)
$\cos h\, 2q = 2x^2 - 1$, und wenn man beide Theile 804)
der gefundenen Gleichung mit $e^q + e^{-q} = 2x$ multiplizirt, so erhält man

$\frac{1}{2}(e^{3q}+e^{-3q})=4x^3-3x$, d. i. $\cos h3q=4x^3-3x$ 805)

und eben so folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\cos h\,4q=8x^4-8x^2+1\\ \cos h\,5q=16x^5-20x^3+5x\\ \cos h\,6q=32x^6-48x^4+18x^2-1\end{array}\right\}\quad 806)$$

Man multiplizire $\frac{1}{2}(e^q-e^{-q})=y$ mit $e^q+e^{-q}=2x$, so ist $\sin h\,2q=xy$, und auf gleiche Art 807)

$$\left.\begin{array}{l}\sin h\,3q=4x^2y-y\\ \sin h\,4q=8x^3y-4xy\\ \sin h\,5q=16x^4y-12x^2y+y\\ \sin h\,6q=32x^5y-32x^3y+6xy\end{array}\right\}\quad 808)$$

Setzt man in diesen Formeln $1+y^2$ statt x^2, so folgt:

$$\sin h\,3q=4y^3+3y \quad 809)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin h\,4q=x(8y^3+4y)\\ \sin h\,5q=16y^5+20y^3+5y\\ \sin h\,6q=x(32y^5+32y^3+6y)\text{ u. s. f.}\end{array}\right\}\quad 810)$$

511. Bezeichnet man in 805) $\cos h\,3q$ mit g, und setzt $\frac{x}{a}$ statt x, so erhält man die Gleichung

$x^3-\frac{3}{4}a^2x-\frac{1}{4}a^2g=0$, welche gegen die kubische Gleichung $x^3-bx-c=0$ gehalten, gibt $a=2\sqrt{\frac{1}{3}b}$, und $g=\frac{4c}{a^2}=\frac{3c}{b}$, oder $\frac{g}{a}=\frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}=\cos h3q$. Hat man 811) aus dieser Gleichung den hyperbolischen Sektor $3q$ bestimmt, so ist auch q bekannt, und dann ist $x=a\cos h\,q$ d. i. $x=2\sqrt{\frac{1}{3}b}\cos h\,q$. 812)

Sei ferner in 809) $\sin h\,3q=f$, und man setze $\frac{y}{a}$ statt y, so entsteht die Gleichung $y^3+\frac{3}{4}a^2y-\frac{1}{4}a^2f=0$. Die Vergleichung mit der kubischen Gleichung $y^3+by-c=0$ zeigt, daß $a=2\sqrt{\frac{1}{3}b}$, und $f=\frac{3c}{b}$, oder $\frac{f}{a}=\frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}=\sin h\,3q$ ausfällt, 813)

Hieraus findet sich q und endlich
$y = a \sin h\, q$, d. i. $y = 2\sqrt{\frac{1}{3}}\, b \sin h\, q$ Man kann 814)
daher mittelst der Sektoren einer gleichseitigen Hyperbel die kubischen Gleichungen mit einer möglichen Wurzel eben so bequem auflösen, als die mit drei möglichen Wurzeln mittelst der goniometrischen Tafeln.

Heißt noch der Asymptotenwinkel 2φ, und setzt $AP = 1$, so ist $PM = y = tg\,\varphi$, mithin, wegen $x^2 = 1 + y^2$, wird $x = \sqrt{(1+y^2)} = sec\,\varphi$, und wenn man diese Werthe in 803) setzt, erhält man
$q = \lambda(tg\,\varphi + sec\,\varphi)$ d. i. $q = \lambda\, tg\,(45° + \frac{1}{2}\varphi)$ 815)
es ergeben sich sonach die hyperbolischen Sektoren mittelst der goniometrischen Tafeln, wenn man die logarithmischen Tangenten mit dem Modulus der briggischen Logarithmen dividirt. Stellt man für irgend einen Winkel φ, die Größen $tg\,\varphi$, $sec\,\varphi$, und $l\,tg\,(45° + \frac{1}{2}\varphi)$ zusammen, so bedeuten sie zu einander $\sin h\, q$, $\cos h\, q$ und $sec\, t\, h$ oder q. Auf diesen Sätzen gründet sich die nachstehende Tafel der hyperbolischen Sektoren, und ihrer logarithmischen Sinus und Kosinus, welche zur bequemeren Auflösung der kubischen Gleichungen mit einer möglichen Wurzel gebraucht werden kann. Sei gegeben die Gleichung $x^3 - 13.359\,x - 24.638 = 0$, so hat man

$\frac{1}{3}\,b = 4.453$, $l\,\frac{1}{3}\,b = 0.6487$, $l\,c = 1.3916$
$\frac{1}{2}\,l\,\frac{1}{3}\,b = 0.3243$ $\qquad$ $l\,\frac{1}{3}\,ab = 1.2740$
$l\,2 = 0.3010$ $\qquad$ $l\cos h\,3q = 0.1176$
$l\,a = 0.6253$
$l\,\frac{1}{3}\,b = 0.6487$ dieß gibt $3q = 0.3343$, also $q = 0.1114$
$l\,\frac{1}{3}\,ab = 1.2740$ $\qquad$ $l\cos h\,q = 0.0142$
$l\,a = 0.6253$
$l\,x = 0.6395$, $x = 4.360$

Zur Seite 339.

Die elliptischen Bogenlängen enthält die Tafel S. 470. Sei z. B. $a = 1$, $b = 0.34202$, $x = 0.97030$: man setze $b = a \sin\varphi$, $x = a \sin u$; so findet man $\varphi = 20°$, $u = 76°$, und für diese Größen gibt die Tafel 1.29389.

q	S.	C.
0.		0.00
0000	inf.	00
0008	7.2419	00
0015	5429	00
0023	7190	00
0030	8439	00
0038	9409	00
0045	8.0200	00
0053	0870	00
0061	1450	00
0068	1962	01
0076	2419	01
0083	2833	01
0091	3211	01
0099	3559	01
0106	3881	01
0114	4181	02
0121	4461	02
0129	4725	02
0136	4973	02
0144	5208	02
0152	5431	03
0159	5643	03
0167	5845	03
0174	6038	04
0182	6223	04
0190	6401	04
0197	6571	04
0205	6736	05
0212	6894	05
0220	7046	06
0227	7194	06
0235	7337	06
0243	7475	07
0250	7609	07
0258	7739	08
0265	7865	08
0273	7988	09
0281	8107	09
0288	8223	10
0296	8336	10
0303	8446	11
0311	8554	11
0319	8659	12
0326	8762	12
0334	8862	13
0341	8960	13

q	S.	C.
0.	8.	0.00
0349	9056	14
0357	9150	15
0364	9241	15
0372	9331	16
0379	9420	17
0387	9506	17
0395	9591	18
0402	9674	19
0410	9756	19
0418	9836	20
0425	9915	21
0433	9992	22
0440	9.0068	22
0448	0143	23
0456	0216	24
0463	0289	25
0471	0360	25
0478	0430	26
0486	0499	27
0494	0567	28
0501	0633	29
0509	0699	30
0517	0764	31
0524	0828	32
0532	0891	32
0540	0954	33
0547	1015	34
0555	1076	35
0562	1135	36
0570	1194	37
0578	1252	38
0585	1310	39
0593	1367	40
0601	1423	41
0608	1478	42
0616	1533	44
0624	1587	45
0631	1640	46
0639	1693	47
0647	1745	48
0654	1797	49
0662	1848	50
0670	1898	51
0677	1948	53
0685	1997	54
0693	2046	55

q	S.	C.
0.	9.	0.0
0700	2094	056
0708	2142	057
0716	2189	059
0723	2236	060
0731	2282	061
0739	2328	063
0746	2374	064
0754	2419	065
0762	2463	066
0770	2507	068
0777	2551	069
0785	2594	071
0793	2637	072
0800	2680	073
0808	2722	075
0816	2764	076
0824	2805	078
0831	2846	079
0839	2887	081
0847	2927	082
0854	2967	084
0862	3006	085
0870	3046	087
0878	3085	088
0885	3123	090
0893	3162	091
0901	3200	093
0909	3237	094
0916	3275	096
0924	3312	098
0932	3349	099
0940	3385	101
0947	3422	103
0955	3458	104
0963	3493	106
0971	3529	108
0978	3564	109
0986	3599	111
0994	3634	113
1002	3668	115
1010	3702	116
1017	3736	118
1025	3770	120
1033	3804	121
1041	3837	124
1048	3870	125

q	S.	C.
0.	9.	0.0
1056	3903	127
1064	3935	129
1072	3968	131
1080	4000	133
1088	4032	135
1095	4064	137
1103	4095	139
1111	4127	141
1119	4158	143
1127	4189	145
1135	4220	147
1142	4250	149
1150	4281	151
1158	4311	153
1166	4341	155
1174	4371	157
1182	4400	159
1189	4430	161
1197	4459	163
1205	4488	165
1213	4517	167
1221	4546	169
1229	4575	172
1237	4603	174
1245	4632	176
1253	4660	178
1260	4688	180
1268	4716	183
1276	4744	185
1284	4771	187
1292	4799	189
1300	4826	192
1308	4853	194
1316	4880	196
1324	4907	199
1332	4934	201
1340	4961	203
1348	4987	206
1356	5014	208
1364	5040	211
1371	5066	213
1379	5092	215
1387	5118	218
1395	5143	220
1403	5169	223
1411	5195	225

q	S.	C.	q	S.	C.	q	S.	C.	q	S.	C.
0.	9.	0.0	0.	9.	0.0	0.	9.	0.0	0.	9.	0.0
1419	5220	228	1792	6279	360	2178	7183	525	2580	7992	725
1427	5245	230	1800	6300	363	2187	7202	529	2589	8006	730
1435	5270	233	1809	6321	366	2195	7220	533	2598	8025	735
1443	5295	236	1817	6341	369	2204	7238	537	2607	8042	740
1451	5320	238	1825	6362	373	2212	7257	541	2616	8059	745
1459	5345	241	1833	6383	376	2221	7275	545	2625	8075	749
1467	5370	243	1842	6404	379	2229	7293	549	2634	8092	754
1475	5394	246	1850	6424	383	2238	7311	553	2643	8109	759
1483	5419	249	1858	6445	386	2247	7330	557	2652	8125	764
1491	5443	251	1867	6465	389	2255	7348	561	2661	8142	769
1499	5467	254	1875	6486	393	2264	7366	565	2670	8158	774
1507	5491	257	1883	6506	396	2273	7384	569	2680	8175	779
1516	5516	259	1891	6527	399	2281	7402	573	2689	8191	784
1524	5539	262	1900	6547	403	2290	7420	578	2698	8208	789
1532	5563	265	1908	6567	406	2298	7438	582	2707	8224	794
1540	5587	257	1916	6587	410	2307	7455	586	2716	8241	799
1548	5611	270	1925	6607	413	2316	7473	590	2725	8257	804
1556	5634	273	1933	6627	417	2325	7491	594	2734	8274	809
1564	5658	276	1941	6647	420	2333	7509	599	2743	8290	814
1572	5681	278	1950	6667	424	2342	7526	603	2752	8306	819
1580	5704	281	1958	6687	427	2351	7544	607	2762	8323	825
1588	5727	284	1966	6706	431	2359	7562	612	2771	8339	830
1596	5750	287	1975	6726	434	2368	7579	616	2780	8355	835
1604	5773	290	1983	6746	438	2377	7597	620	2789	8371	840
1612	5796	293	1992	6765	441	2386	7614	625	2798	8388	845
1621	5819	296	2000	6785	445	2394	7632	629	2808	8404	851
1629	5842	298	2008	6804	449	2403	7649	633	2817	8420	856
1637	5864	301	2017	6824	452	2412	7667	638	2826	8436	861
1645	5887	304	2025	6843	456	2421	7684	642	2835	8452	866
1653	5909	307	2034	6863	460	2429	7701	647	2844	8468	872
1661	5932	310	2042	6882	463	2438	7719	651	2854	8484	877
1669	5954	313	2051	6901	467	2447	7736	656	2863	8501	882
1677	5976	316	2059	6920	471	2456	7753	660	2872	8517	888
1686	5998	319	2067	6939	475	2465	7771	665	2882	8533	893
1694	6020	322	2076	6958	478	2474	7788	669	2891	8549	899
1702	6042	325	2084	6977	482	2482	7805	674	2900	8565	904
1710	6064	328	2093	6996	486	2491	7822	678	2910	8581	909
1718	6086	331	2101	7015	490	2500	7839	683	2919	8597	915
1726	6108	334	2110	7034	493	2509	7856	688	2928	8613	920
1735	6129	338	2118	7053	497	2518	7873	692	2938	8629	926
1743	6151	341	2127	7072	501	2527	7890	697	2947	8644	931
1751	6172	344	2135	7090	505	2536	7907	702	2957	8660	937
1759	6194	347	2144	7109	509	2545	7924	706	2966	8676	943
1767	6215	350	2152	7128	513	2554	7941	711	2975	8692	948
1776	6236	353	2161	7146	517	2562	7958	716	2985	8708	954
1784	6257	357	2169	7165	521	2571	7975	721	2994	8724	969

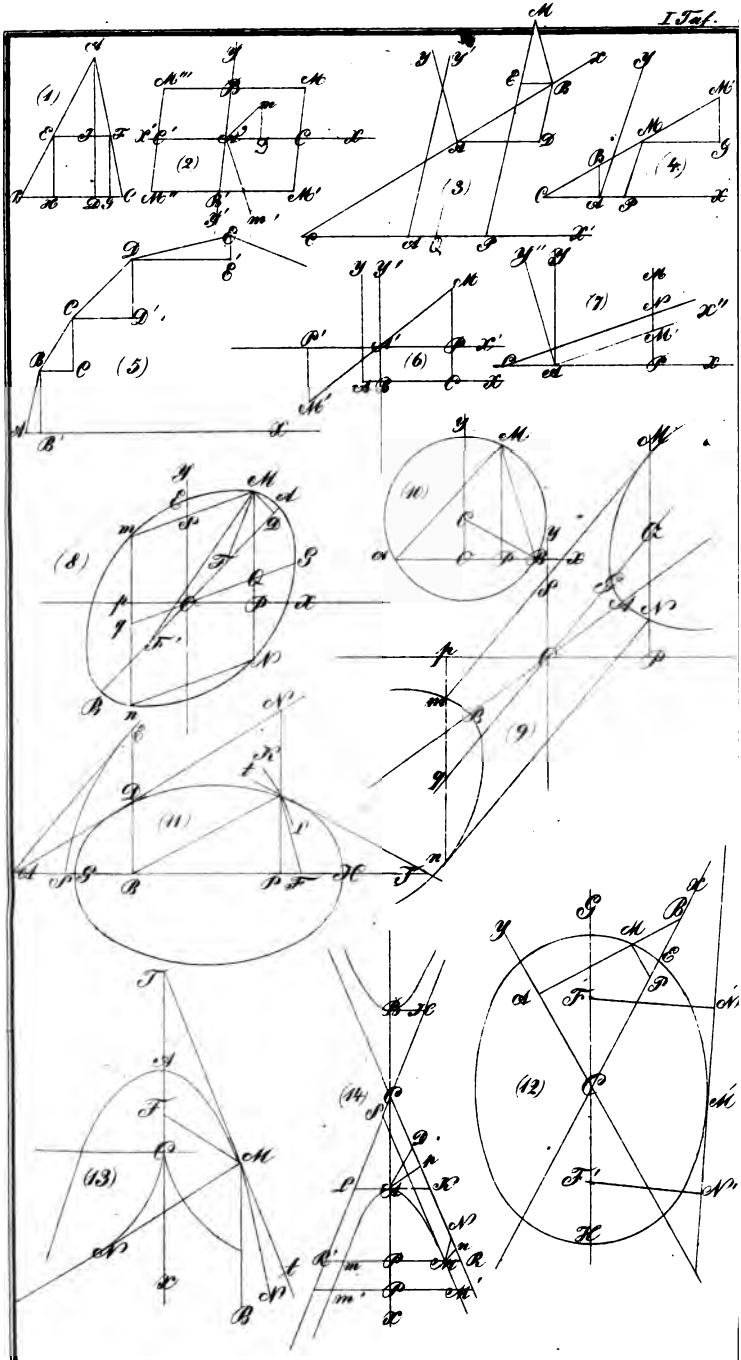
q	S.	C.
0.	9.	0.
3004	8740	0965
3013	8755	0971
3023	8771	0977
3032	8787	0982
3042	8803	0988
3051	8818	0994
3061	8834	1000
3070	8850	1005
3080	8865	1011
3089	8881	1017
3099	8897	1023
3109	8912	1029
3118	8928	1035
3128	8944	1041
3137	8959	1047
3147	8975	1053
3157	8990	1059
3166	9006	1065
3176	9022	1071
3186	9037	1077
3196	9053	1083
3205	9068	1089
3215	9084	1095
3225	9099	1101
3235	9115	1107
3244	9130	1113
3254	9146	1120
3264	9161	1126
3274	9176	1132
3284	9192	1138
3294	9207	1145
3303	9223	1151
3313	9238	1157
3323	9254	1164
3333	9269	1170
3343	9284	1177
3353	9300	1183
3363	9315	1190
3373	9330	1196
3383	9346	1203
3393	9361	1209
3403	9376	1216
3413	9392	1222
3423	9407	1229
3433	9422	1235
3443	9438	1242

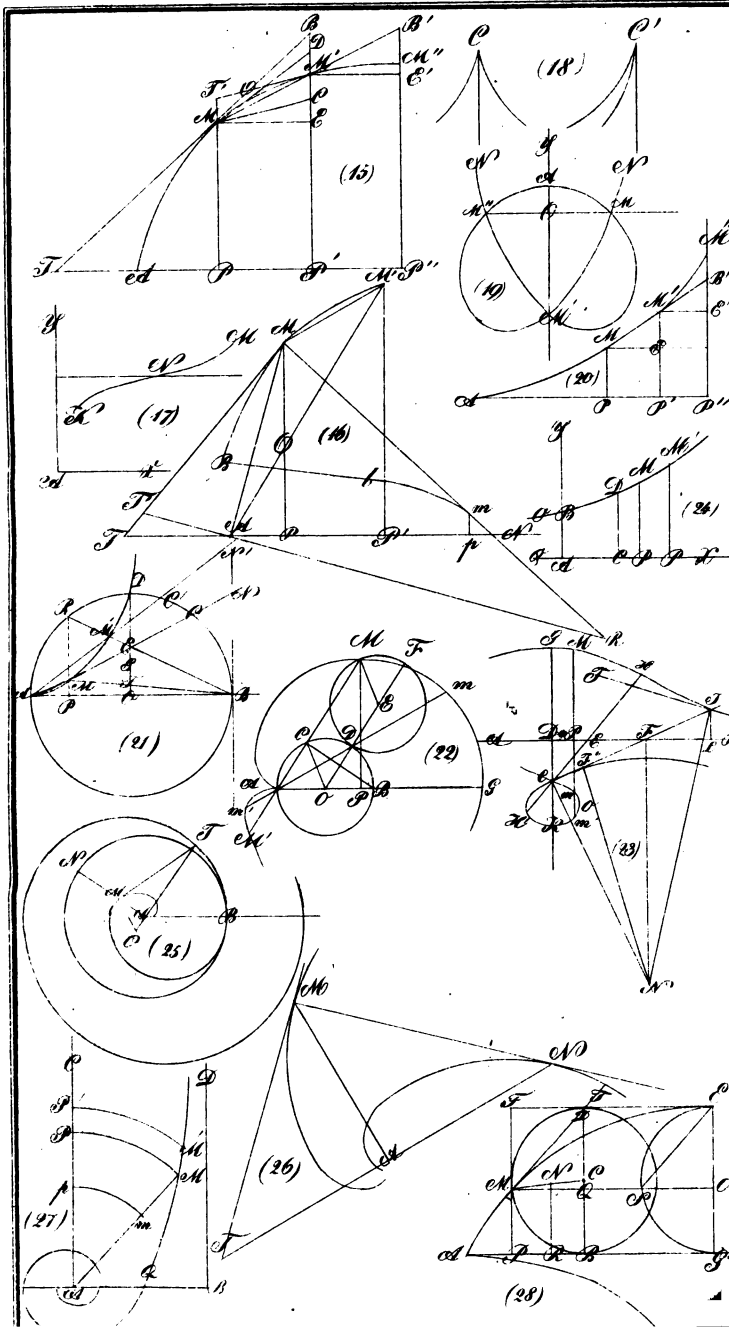
q	S.	C.
0.	0.	0.1
3453	9453	249
3463	9468	255
3473	9483	262
3484	9499	269
3494	9514	276
3504	9529	282
3514	9544	289
3524	9560	296
3535	9575	303
3545	9590	310
3555	9605	317
3565	9621	324
3576	9636	331
3586	9651	338
3596	9666	345
3607	9681	352
3617	9697	359
3627	9712	366
3638	9727	373
3648	9742	380
3659	9757	387
3669	9772	394
3679	9788	402
3690	9803	409
3700	9818	416
3711	9833	423
3721	9848	431
3732	9864	438
3743	9879	445
3753	9894	453
3764	9909	460
3774	9924	468
3785	9939	475
3796	9955	483
3806	9970	490
3817	9985	498
3828	0000	505
3838	0015	513
3849	0030	520
3860	0045	528
3871	0061	536
3882	0076	543
3892	0091	551
3903	0106	559
3914	0121	567
3925	0136	573

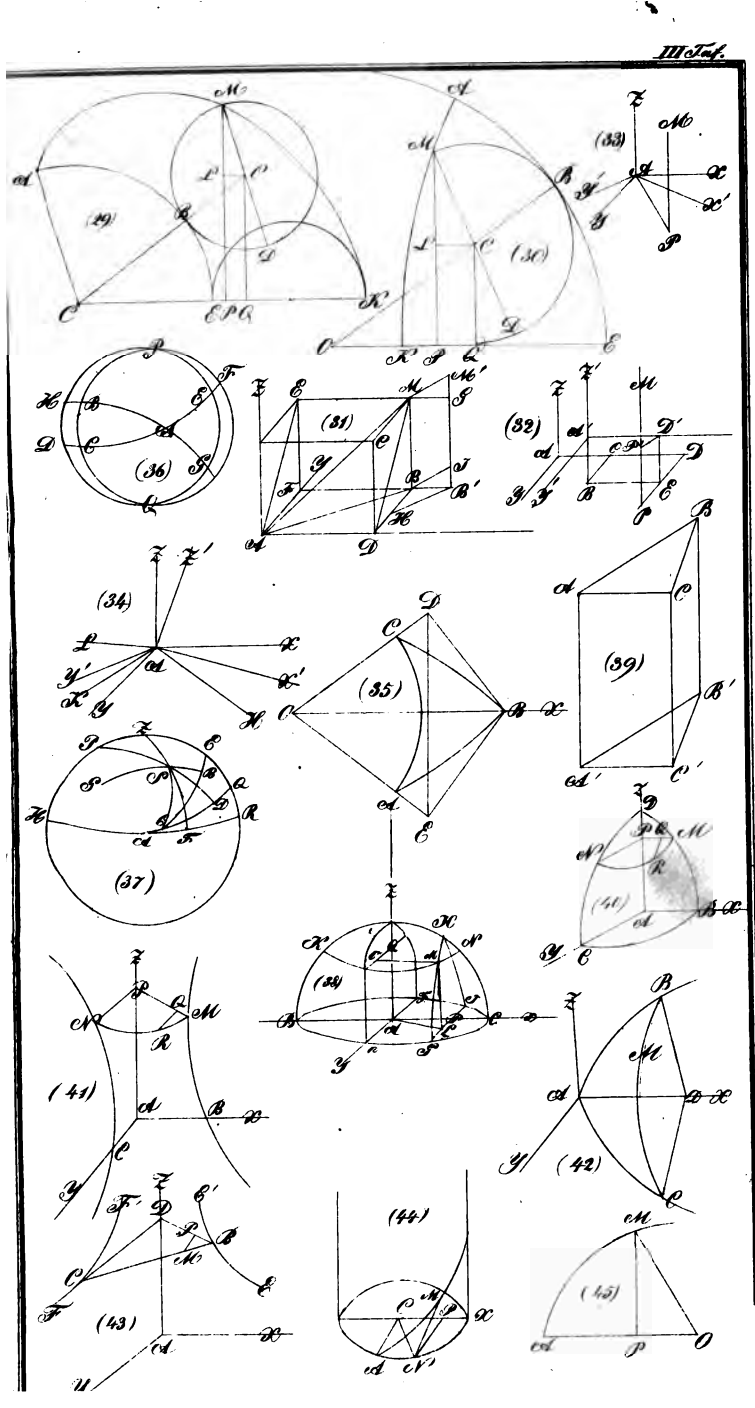
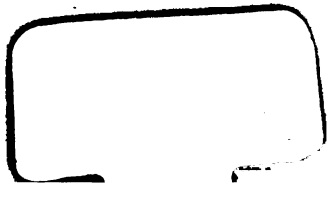
q	S.	C.
0.	0.	0.1
3936	0152	582
3947	0167	590
3958	0182	598
3969	0197	606
3980	0212	614
3991	0228	622
4002	0243	630
4013	0258	638
4024	0273	646
4035	0288	654
4046	0303	662
4057	0319	670
4068	0334	678
4079	0349	687
4091	0364	695
4102	0379	703
4113	0395	711
4124	0410	720
4136	0425	728
4147	0440	736
4158	0456	745
4170	0471	753
4181	0486	762
4192	0501	770
4204	0517	779
4215	0532	787
4227	0547	796
4238	0562	805
4250	0578	813
4261	0593	822
4273	0608	831
4284	0624	839
4296	0639	848
4307	0654	857
4319	0570	866
4331	0685	875
4342	0700	883
4354	0716	892
4366	0731	901
4378	0746	910
4389	0762	919
4401	0777	928
4413	0793	937
4425	0808	947
4437	0824	956
4449	0839	965

q	S.	C.
0.	0.	0.
4461	0854	1974
4472	0870	1983
4484	0885	1993
4496	0901	2002
4509	0916	2011
4521	0932	2021
4533	0947	2030
4545	0963	2040
4557	0978	2049
4569	0994	2059
4581	1010	2068
4593	1022	2078
4606	1041	2087
4618	1056	2097
4630	1072	2107
4643	1088	2116
4655	1103	2126
4667	1119	2136
4680	1135	2146
4692	1150	2156
4705	1166	2165
4747	1182	2175
4730	1197	2185
4742	1213	2195
4755	1229	2205
4767	1245	2215
4780	1260	2226
4793	1276	2236
4805	1292	2246
4818	1308	2256
4831	1324	2266
4844	1340	2277
4857	1356	2287
4869	1371	2297
4882	1387	2308
4895	1403	2318
4908	1419	2329
4921	1435	2339
4934	1451	2350
4947	1467	2360
4960	1483	2371
4973	1499	2382
4986	1516	2393
5000	1532	2403

Gr.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
5	0.08727	08726	08726	08725	08725	08724	08723	08722	08721
10	0.17453	17451	17447	17443	17438	17431	17424	17417	17409
15	0.26178	26171	26160	26145	26127	26106	26083	26058	26032
20	0.34901	34886	34860	34825	34783	34733	34678	34619	34558
25	0.43623	43593	43544	43477	43394	43298	43191	43076	42958
30	0.52343	52292	52208	52094	51953	51788	51605	51409	51205
35	0.61060	60980	60850	60672	60451	60194	59907	59598	59276
40	0.69774	69658	69467	69207	68884	68506	68084	67628	67153
45	0.78486	78324	78059	77697	77247	76720	76128	75489	74819
50	0.87194	86979	86626	86142	85539	84832	84036	83173	82265
51	0.88936	88709	88336	87826	87189	86442	85601	84689	83728
52	0.90677	90438	90045	89507	88836	88048	87161	86197	85182
53	0.92418	92166	91753	91187	90481	89650	88715	87698	86627
54	0.94159	93895	93460	92865	92122	91248	90264	89193	88063
55	0.95900	95622	95166	94541	93761	92843	91807	90680	89490
56	0.97641	97350	96872	96216	95397	94433	93345	92160	90908
57	0.99381	99077	98576	97889	97030	96019	94878	93634	92318
58	1.01122	00803	00279	99560	98661	97602	96405	95100	93719
59	1.02863	02529	01981	01229	00289	99180	97928	96560	95111
60	1.04603	04255	03683	02897	01915	00756	99445	98013	96495
61	1.06343	05980	05383	04563	03538	02327	00957	99460	97871
62	1.08084	07705	07083	06228	05158	03895	02465	00900	99238
63	1.09824	09430	08781	07891	06776	05459	03967	02334	00598
64	1.11564	11154	10479	09553	08392	07020	05465	03762	01949
65	1.13304	12878	12176	11213	10005	08577	06958	05183	03293
66	1.15043	14601	13873	12871	11616	10132	08447	06599	04629
67	1.16783	16324	15568	14529	13225	11683	09932	08009	05957
68	1.18523	18047	17263	16185	14832	13231	11412	09413	07279
69	1.20262	19769	18957	17839	16437	14776	12888	10812	08593
70	1.22002	21491	20650	19493	18040	16317	14360	12205	09901
71	1.23741	23213	22343	21145	19640	17857	15828	13594	11202
72	1.25481	24935	24034	22796	21239	19394	17293	14977	12497
73	1.27220	26656	25726	24446	22837	20928	18754	16356	13786
74	1.28959	28377	27417	26094	24432	22459	20211	17731	15068
75	1.30698	30097	29107	27742	26026	23989	21666	19101	16346
76	1.32437	31818	30796	29389	27619	25516	23117	20467	17618
77	1.34176	33538	32486	31035	29210	27041	24566	21830	18885
78	1.35915	35258	34174	32680	30800	28565	26012	23189	20148
79	1.37654	36978	35862	34325	32389	30086	27456	24544	21407
80	1.39393	38698	37550	35968	33976	31606	28897	25897	22661
81	1.41132	40417	39238	37611	35563	33124	30336	27246	23912
82	1.42871	42137	40925	39254	37148	34641	31773	28594	25159
83	1.44610	43856	42612	40896	38733	36157	33209	29939	26404
84	1.46349	45575	44299	42537	40317	37672	34643	31282	27646
85	1.48087	47294	45985	44178	41900	39186	36076	32623	28886
86	1.49826	49013	47671	45819	43483	40699	37508	33963	30124
87	1.51565	50732	49357	47459	45066	42211	38939	35302	31360


(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)
(9)
(10)
(11)
(12)
(13)
(14)


(15)
(16)
(17)
(18)
(19)
(20)
(21)
(22)
(23)
(24)
(25)
(26)
(27)
(28)


(29)
(30)
(33)
(36)
(31)
(32)
(34)
(35)
(39)
(37)
(41)
(38)
(41)
(42)
(43)
(44)
(45)

JAN 2 1 1938